Научная статья
УДК 624.04
https://doi.org/10.21285/2227-2917-2022-3-384-393

Оценка приемлемости и погрешности применения спектральных разложений в задачах динамики нелинейных многомерных систем

© Владимир Иванович Соболев, Данил Андреевич Кармазинов
Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия
Автор, ответственный за переписку: Кармазинов Данил Андреевич, dkarmazinov@gmail.com

Аннотация. Как правило, реальные элементы конструкций обладают различными нелинейными свойствами, наиболее существенно проявляющимися при интенсивных динамических процессах. Отклонение механических характеристик от линейных, принятых в идеализированных моделях, для которых осуществляется решение проблемы собственных значений, может привести к неприемлемым погрешностям расчетов или даже сделать результаты абсолютно неверными. По этой причине остается открытым вопрос точности и правомерности использования линейных моделей и обусловленных ими методов, основанных на применении решения проблем собственных значений. Цель работы – проанализировать погрешности, возникающие при использовании спектральных методов в условиях «наилучших» приближений нелинейных характеристик линейными зависимостями, полученными на основе среднеквадратичных аппроксимаций, исключающими излишние сомнения в формировании результатов. Рассматривалась динамическая модель в виде безопорной балки с двумя сосредоточенными массами, совершающими колебания в направлениях, перпендикулярных оси жесткости. Для линейной модели произведена оценка точности аппроксимации исходной нелинейной жесткости путем сравнения амплитудных значений перемещения и скоростей системы при линеаризованной и исходной жесткости. Также рассмотрено сравнение вышеуказанного способа линеаризации с линеаризацией по нулевой первой производной нелинейной жесткостной функции. Полученные расхождения в результате являются функциями начальных условий. Предельные значения отклонений в точке максимума функции, описывающей нелинейность жесткости, составили для метода среднеквадратичных отклонений 2,02 %, для метода нулевой первой производной – 10,55 %. Полученные результаты требуют уточнения в отношении конструктивных систем, применяющихся в строительной практике.

Ключевые слова: линейно-спектральная теория, безопорные системы, мягкая нелинейность, собственные числа, собственные колебания, RADAU5

Для цитирования: Соболев В. И., Кармазинов Д. А. Оценка приемлемости и погрешности применения спектральных разложений в задачах динамики нелинейных многомерных систем // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2022. Т. 12. № 3. С. 384–393. https://doi.org/10.21285/2227-2917-2022-3-384-393.

Original article

Assessment of the applicability and error of eigendecomposition in the problems of nonlinear multidimensional system dynamics

© Vladimir I. Sobolev, Danil A. Karmazinov
Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia
Corresponding author: Danil A. Karmazinov, dkarmazinov@gmail.com

Abstract. Real structural elements exhibit various nonlinear properties, which are most significantly manifested during intensive dynamic processes. The deviation of mechanical characteristics from the linear ones adopted in idealised models, for which the problem of eigenvalues is solved, can lead to unacceptable calculation errors or completely false results. For this reason, the accuracy and applicability of linear models and resulting methods based on solving problems of eigenvalues remain an open question. The study is aimed at the analysis of errors associated with the application of spectral methods in “best” approximations of nonlinear characteristics by linear dependences, obtained on the basis of root-meansquare approximations, which prevent superfluous doubts about the result formation. A dynamic model of an unsupported beam with two concentrated masses oscillating in directions perpendicular to the stiffness axis was considered. For the linear model, the accuracy of approximating the initial nonlinear stiffness was assessed by comparing the amplitude displacement values and velocities of the system at the linearized and initial stiffness. In addition, a comparison of the above linearization method with the linearization by a zero first derivative of the nonlinear stiffness function is considered. The discrepancies in the results represent the functions of initial conditions. The limit values of deviations at the maximum point of the function, describing the nonlinearity of stiffness, comprised 2.02 and 10.55% for the methods of standard deviation and zero first derivative, respectively. The obtained results require clarification with regard to structural systems used in construction practice.

Keywords: linear spectral theory, unsupported systems, soft nonlinearity, eigenvalues, natural fluctuations, RADAU5

For citation: Sobolev V. I., Karmazinov D. A. Assessment of the applicability and error of eigendecomposition in the problems of nonlinear multidimensional system dynamics. *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost' = Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2022;12(3):384-393. (In Russ.). https://doi.org/10.21285/2227-2917-2022-3-384-393.

Введение

В решении задач строительной механики в подавляющем большинстве случаев используется гипотеза линейной упругости материала конструкций, что делает оправданным применение принципа суперпозиции. В свою очередь, использование этого принципа делает доступными многие методы и приемы решения многомерных задач статики и динамики.

Использование линейной гипотезы деформирования материала конструкций позволяет применять в расчетах матричный аппарат, эффективность которого основана на использовании развитой теоретической базы, а также подтверждена многолетней и разнообразной практикой использования данного аппарата в самых разнообразных областях науки [1, 2]. Однако применение гипотезы линейно-упругого деформирования материала конструкций требует должных обоснований; по этой причине в случае интенсивных воздействий требуется оценка полученных результатов. Следует отметить, что получение точных аналитических решений дифференциальных нелинейных уравнений динамики является достаточно сложной задачей даже в случае применения систем с одной степенью свободы [3], и решение таких задач требует использования различных приемов аппроксимации. Примером может служить приближение к нелинейности осциллятора Дуффинга [4]. В качестве возможных приемов аппроксимации могут быть также упомянуты приближения Чебышева [5, 6].

Приведенные способы хоть и позволяют достичь высокой степени точности аппроксимации в одномерных вариантах, но их применение в многомерных динамических системах требует использования некоторых достаточно простых способов описания процессов динамического взаимодействия, что зачастую приводит к применению методов спектрального разложения [7] с использованием приемов линейных аппроксимаций. Таким образом, становится очевидной потребность в оценке точности и погрешности проявления линейных аппроксимаций в применении спектральных преобразований в решении задач многомерной нелинейной динамики.

Методы

Получение решений с линеаризированной жесткостью

Попытаемся дать оценку использования линейного приближения нелинейной динамической системы по условиям среднеквадратичной аппроксимации. Рассмотрим наиболее простую нелинейную упругую систему с жесткостной функцией вида:

$$H(x) = -ax^3 + c \cdot x, \tag{1}$$

где x – возможное перемещение точки, совершающей колебательное движение.

Такая функция выбрана из условий сохранения полярной симметрии относительно точки исходного положения равновесия [8]. Для аппроксимации исходной функции линейной зависимостью используем критерий среднеквадратичного приближения:

$$\int_0^l (-ax^3 + c \cdot x - rx)^2 \, dx, \tag{2}$$

где rx – линейное приближение жесткостной функции (1); l – некоторое отклонение точки колебательной системы, в пределах которого выполняется линеаризация.

Тогда условие определения r (жесткости), дающее минимальное среднеквадратичное отклонение, запишется как:

$$\frac{d}{dr}\left(\int_0^l (-ax^3 + c \cdot x - rx)^2 \, dx\right) = 0. \tag{3}$$

Жесткость r, таким образом, определяется как:

$$r = -\frac{\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5}} + c. \quad (4)$$

Для упрощения нашей задачи в качестве рассматриваемой системы выберем систему с двумя динамическими степенями свободы, что будет в математическом смысле соответствовать системе, совершающей свободные колебания вида:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x_1} + r_{11}x_1 - r_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x_2} - r_{21}x_1 + r_{22}x_2 = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Предполагая инерционные параметры (массы) данной системы известными и учитывая, что $m_1 = m_2 = m$, а также что $r_{11} = r_{12} = r_{21} = r_{22} = r$, рассмотрим матрицу динамических жесткостей для анализа нелинейной связи и сформируем условия определения частот и форм собственных колебаний в виде:

$$\|D^*\| = \left\| \begin{matrix} \frac{r}{m} - \lambda & -\frac{r}{m} \\ -\frac{r}{m} & \frac{r}{m} - \lambda \end{matrix} \right\|, \quad (6)$$

где r определяется согласно (4); λ – собственные числа (значения) матрицы динамических жесткостей $D = \begin{pmatrix} \frac{r}{m} & -\frac{r}{m} \\ -\frac{r}{m} & \frac{r}{m} \end{pmatrix}$, определяемые как $\lambda = \omega^2$.

Запись матрицы динамической жесткости в форме (6) осуществляется при использовании следующей замены для x_1 и x_2:

$$\begin{matrix} x_1 = a_1 \cos(\omega t) \\ x_2 = a_2 \cos(\omega t) \end{matrix}. \quad (7)$$

Для исследования влияния нелинейной связи рассмотрим только лишь динамическое взаимодействие двух одинаковых масс, соединенных нелинейной связью, отбросив опорные связи. Такая безопорная система, кроме исключительно теоретического интереса, может быть использована при формировании узловых эффектов в безопорной колебательной балке с дальнейшим ее применением в системах виброзащиты [9].

Для определения собственных значений λ такой динамической системы решим проблему собственных значений путем приравнивания (6) нулю:

$$\|D^*\| = \left\| \begin{matrix} \frac{r}{m} - \lambda & -\frac{r}{m} \\ -\frac{r}{m} & \frac{r}{m} - \lambda \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m} - \lambda & -\frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m} \\ -\frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m} & \frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m} - \lambda \end{matrix} \right\| = 0. \quad (8)$$

Вычисляя детерминант (8), получим:

$$\lambda(6al^2 - 10c + 5m\lambda) = 0,$$

корни которого, очевидно, найдутся как:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\frac{6al^2}{5} + 2c}{m} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поскольку динамическая система безопорна, то справедливо, что $\lambda_1 = 0$.

Определим теперь собственные векторы системы (5). Для этого запишем первое уравнение данной системы с учетом замены (7) и подставим найденное нами значение λ_1, приняв предварительно $a_1 = 1$:

$$\left(\frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m}\right) \cdot 1 - \left(\frac{-\frac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c}{m}\right) a_2 = 0. \quad (10)$$

Решив полученное уравнение и найдя a_2, получим собственный вектор A_1 системы (5), нормируя который, получим:

$$A_{1n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Проведя аналогичные вычисления для λ_2, получим для нормированного собственного вектора A_{2n}:

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, введем матрицу Φ, составленную из компонентов нормированных векторов A_{1n} и A_{2n}:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Используя (12), можно произвести разделение переменных исходной системы уравнений (5), осуществляя фактически отображение колебательного процесса по направлению собственных векторов. Для этого введем замену переменных $X = \Phi^{-1}Y$ и преобразуем исходную систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{matrix} \ddot{X} + DX = \Phi^{-1}\ddot{Y} + D\Phi^{-1}Y = 0 \\ \ddot{Y} + \Phi D\Phi^{-1}Y = \ddot{Y} + \Lambda Y = 0, \end{matrix} \quad (13)$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{6al^2}{5} + 2c}{m} \end{pmatrix}$ – матрица собственных чисел матрицы *D*.

Решая систему (13), получим следующее выражение относительно *Y*:

$$Y = \begin{pmatrix} C_1^1 t + C_2^1 \\ C_1^2 \cdot \cos(\sqrt{\lambda_2} t) \end{pmatrix}.$$

Для данной системы, используя матрицу единичных собственных векторов Φ, можно получить значения начальных условий относительно пространства Y (в качестве начальных условий для пространства X рассмотрим вариант, соответствующий второй собственной форме колебаний: $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \end{pmatrix}$ и $X_0{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где x_0 – некоторое начальное возмущение точек системы в форме перемещения). Воспользовавшись этими начальными значениями, мы, в свою очередь, получаем точные значения для констант C_1^1, C_2^1 и C_1^2. Возвращаясь к исходным значениям X, для вектор-функций перемещения и скорости мы окончательно получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \cdot cos(\left[\left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \\ -x_0 \cdot cos(\left[\left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$$V = \begin{pmatrix} -\left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \cdot sin(\left[\left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \\ \left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \cdot sin(\left[\left(\frac{-\frac{6al^2}{5}+2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Полученные компоненты X отображают перемещения узлов модели в исходной системе координат (исходном пространстве).

Рассмотрим теперь аппроксимацию жесткостной функции в виде производной в нулевой точке:

$$r'(x) = k \cdot x, \quad (16)$$

где $k = \frac{d}{dx}H(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}(-ax^3 + \text{c} \cdot x)|_{x=0} = \text{c}.$

Идея обращения к жесткостной функции такого рода состоит в ее повсеместной распространенности в инженерных расчетах. Однако очевидно, что аппроксимация нелинейной функции жесткости данным выражением применима лишь в небольших пределах относительного смещения точек тел системы (линейно упругие деформации), что иллюстрируется рис. 1.

По этой причине возникает потребность в оценке точности линеаризации по величине производной в точке исходного равновесия (линеаризация по нулевой первой производной) и ее сравнении с таковой для линеаризации по среднеквадратичному отклонению.

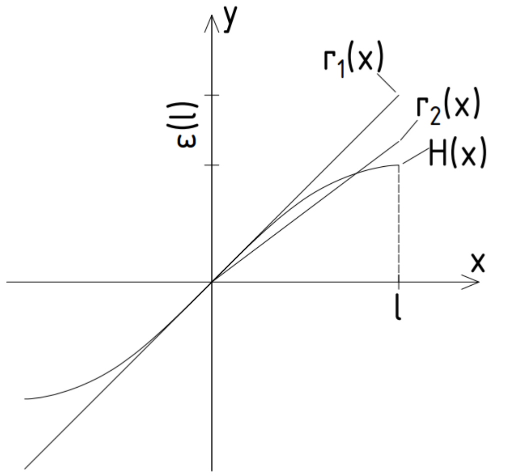

Рис. 1. Аппроксимации нелинейной функции *H(x)* ее приближением
Fig. 1. Demonstration of the approximation of a nonlinear function *H(x)* by its approximations

Для этого получим сперва вектор-функции перемещений и скоростей точек рассматриваемой колебательной системы при новой линеаризации жесткости. Проделав вышеописанные операции (6–15), заменив в них функции жесткости выражением (16), в качестве решения системы дифференциальных уравнений получим:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \cdot cos(\left[\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \\ -x_0 \cdot cos(\left[\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$$V = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \cdot sin(\left[\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \\ \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \cdot sin(\left[\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Оценка точности методик линеаризации

Для оценки точности вариантов решения, отраженных в (14), (15) и (17), (18), получим решение, сформированное при использовании исходной нелинейной модели, имеющей кубическую нелинейность в отображении жесткости (1). Для этого найдем решение системы (5) с помощью методов численного интегрирования. С этой целью воспользуемся программным комплексом *Mathcad*, позволяющим выполнять численное интегрирование дифференциальных уравнений посредством использования встроенных функций.

Для решения задач, поставленных в рамках данной работы, был применен метод *RADAU5* [10], функционал которого позволяет использовать его для решения систем с «мягкой» и с «жесткой» нелинейностью с весьма высоким уровнем точности и устойчивости результата (последнее имеет значение для жестких систем уравнений и не принципиально в рамках данной работы).

Определившись с методом численного дифференцирования, рассмотрим поведение систем (14), (15) и (17), (18) совместно с численным решением дифференциальных уравнений колебательной системы с жесткостной функцией вида кубической параболы. При этом сравниваются перемещения и скорости лишь одной из масс системы при начальных отклонениях, соответствующих следующему условию:

$$\frac{d}{dx}H(x)|_{x=l} = 0,$$

что эквивалентно

$$l = l_{\text{пр}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{c}}{3\sqrt{a}}. \tag{19}$$

Данное значение примечательно тем, что соответствует (в нашей постановке задачи) верхней границе упругой деформации тела при условии аппроксимации функцией вида (1) диаграммы деформирования материалов [8]. Соответственно, значения погрешности, полученной в данной точке, определят саму допустимость аппроксимации вида (4) и (16) в целом, а также позволят дать оценку относительной точности аппроксимации этих методов. Задав теперь значения параметров, характеризующих колебательную систему, сравним значения погрешности в амплитудных отклонениях перемещения и скоростей (рис. 2 и рис. 3 соответственно).

Для удобства представления результатов было принято решение ограничиться интервалом, равным периоду колебаний системы с жесткостью вида (4).

Таким образом, можно заключить, что в амплитудных значениях скоростей наблюдается некоторая погрешность, вызванная, очевидно, влиянием нелинейности исходной функции жесткости.

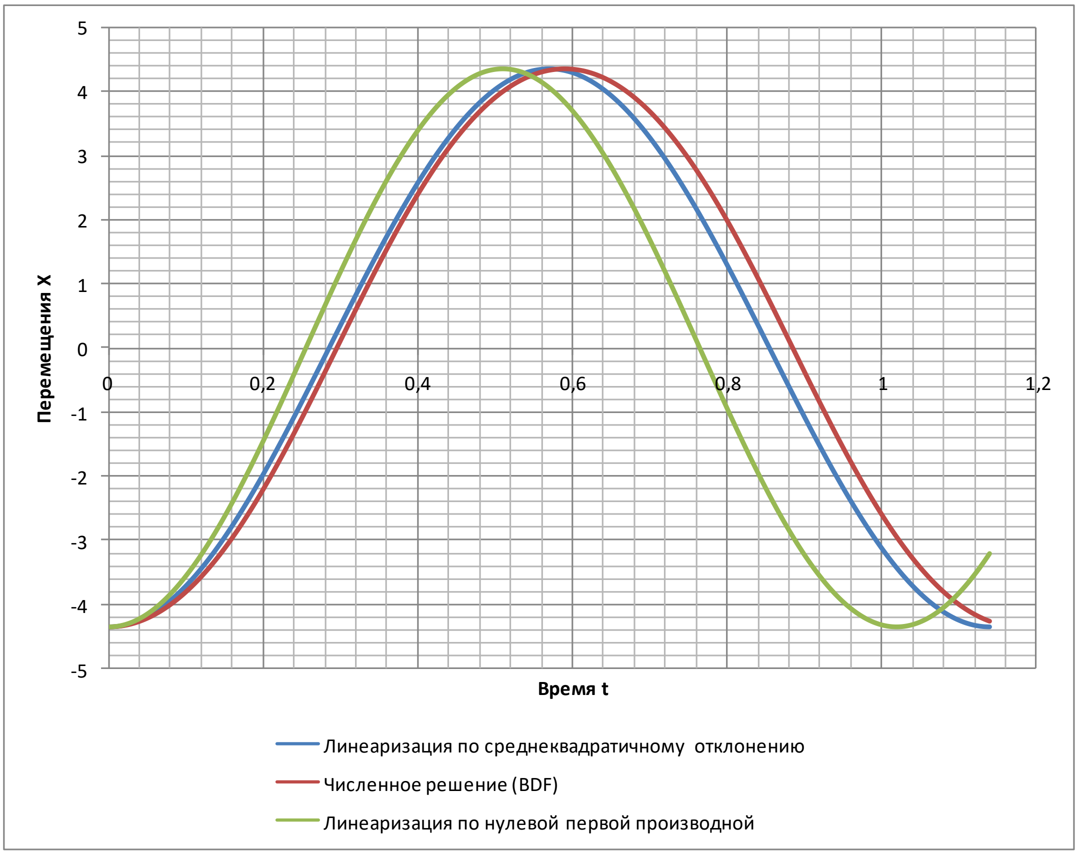

Рис. 2. Сравнительная диаграмма функций $X_2(t)$ при m = 1, a = 1, c = 20
Fig. 2. Comparative diagram of functions $X_2(t)$ with m = 1, a = 1, c = 20

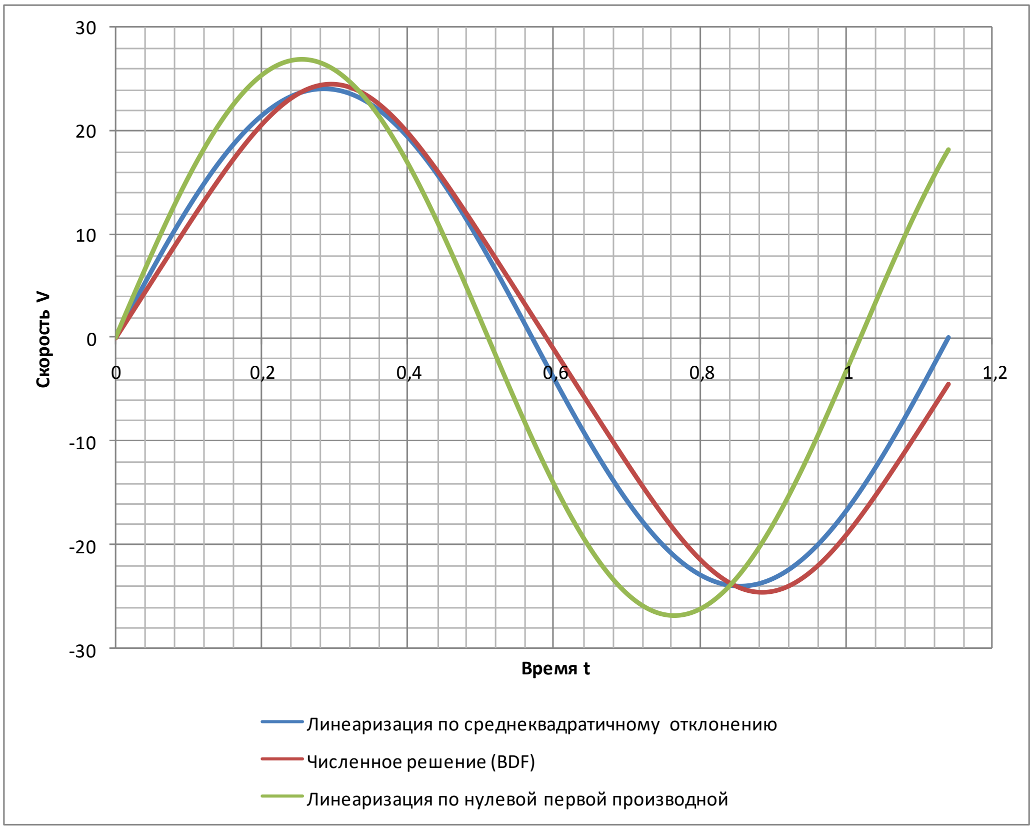

Рис. 3. Сравнительная диаграмма функций *V₂(t)* при *m* = 1, *a* = 1, *c* = 20
Fig. 3. Comparative diagram of functions *V₂(t)* with *m* = 1, *a* = 1, *c* = 20

Данное обстоятельство важно тем, что эти отклонения фактически определят погрешности вычисления собственных частот $\sqrt{\lambda}$ в соответствии с принципами линейно-спектральной теории. Соответственно, при определении значений коэффициента динамичности возникает неточность, которая (к примеру) может повлечь за собой погрешность в определении сейсмических нагрузок и внутренних усилий системы [11], если речь заходит о расчете конструкций на сейсмостойкость.

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим для наглядности несколько систем с различными значениями параметра a при значениях параметра $m = 1$ и параметра $c = 1$ и покажем, что погрешность амплитудных значений $V_2(t)$ и $X_2(t)$ сохраняется при значениях начальных смещений, равных значению $l_{\text{пр}}$. Последнее соответствует колебательному процессу, протекающему в нелинейно упругой области деформации материала. Расчеты сведены в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение погрешностей амплитудных значений *X₂(t)* и *V₂(t)* в нелинейно упругой области деформации материала при изменении параметра *a*
Table 1. Comparison of errors of amplitude values *X₂(t)* and *V₂(t)* in the nonlinear elastic deformation region of the material when changing the parameter *a*

a	Численное решение		Решение при линеаризации по среднеквадратичному отклонению				Решение при линеаризации по нулевой первой производной			
	$X_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$V_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$X_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$V_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$\varepsilon_{X\text{амп}}$, %	$\varepsilon_{X\text{амп}}$, %	$X_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$V_{2\text{амп}}$ 10^{-2}	$\varepsilon_{X\text{амп}}$, %	$\varepsilon_{X\text{амп}}$, %
10	18,26	23,57	18,25	23,09	0	2,02	18,26	25,82	0	9,54
20	12,91	16,67	12,91	16,33	0	2,02	12,91	18,25	0	9,54
30	10,54	13,61	10,54	13,33	0	2,02	10,54	14,91	0	9,54

Из анализа табл. 1 становится ясно, что при начальных условиях, соответствующих деформациям в нелинейно упругой области, предпочтительнее использовать линеаризацию в форме минимума среднеквадратичного отклонения, поскольку это позволяет уменьшить величину погрешности практически пятикратно, что является существенным с инженерной точки зрения. Теперь рассмотрим ситуацию колебания этих же систем под воздействием начальных смещений, существенно ниже значений, вычисляемых согласно (19). Для определенности примем начальные условия в виде $X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}01l \\ -0{,}01l \end{pmatrix}$. Расчеты сведены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение погрешностей амплитудных значений *X₂(t)* и *V₂(t)* в линейно упругой области деформации материала при изменении параметра *a*

Table 2. Comparison of errors of amplitude values *X₂(t)* and *V₂(t)* in the linear elastic deformation region of the material when changing the parameter *a*

a	Численное решение		Решение при линеаризации по среднеквадратичному отклонению				Решение при линеаризации по нулевой первой производной			
	$X_{2амп}$ 10^{-4}	$V_{2амп}$ 10^{-4}	$X_{2амп}$ 10^{-4}	$V_{2амп}$ 10^{-4}	$\varepsilon_{Xамп}$, %	$\varepsilon_{Vамп}$, %	$X_{2амп}$ 10^{-4}	$V_{2амп}$ 10^{-4}	$\varepsilon_{Xамп}$, %	$\varepsilon_{Vамп}$, %
10	18,26	25,82	18,26	23,09	0	10,55	18,26	25,82	0	0
20	12,91	18,26	12,91	16,33	0	10,55	12,91	18,26	0	0
30	10,54	14,91	10,54	13,33	0	10,55	10,54	14,91	0	0

Рассматривая результаты вычислений, представленные в табл. 1 и 2, можно заключить, что область применимости линеаризации по среднеквадратичному отклонению зависит от величины начальных воздействий: при начальных возмущениях, соответствующих упругим деформациям, предпочтительно применение линеаризации по нулевой первой производной; соответственно, в случае нелинейно упругих деформаций для минимизации погрешностей надлежит использовать линейную жесткость вида (4). Руководствуясь данным умозаключением, можно установить величину начальных перемещений в долях от $l_{пр}$, соответствующих превышению погрешности амплитудных значений скоростей при аппроксимации вида (16) над погрешностью при аппроксимации вида (4).

Для этого обратимся к сравнительной диаграмме погрешностей $\varepsilon_{Vамп}$ как функции параметра $x_{0относ} = \frac{x_0}{l_{пр}}$ (рис. 4).

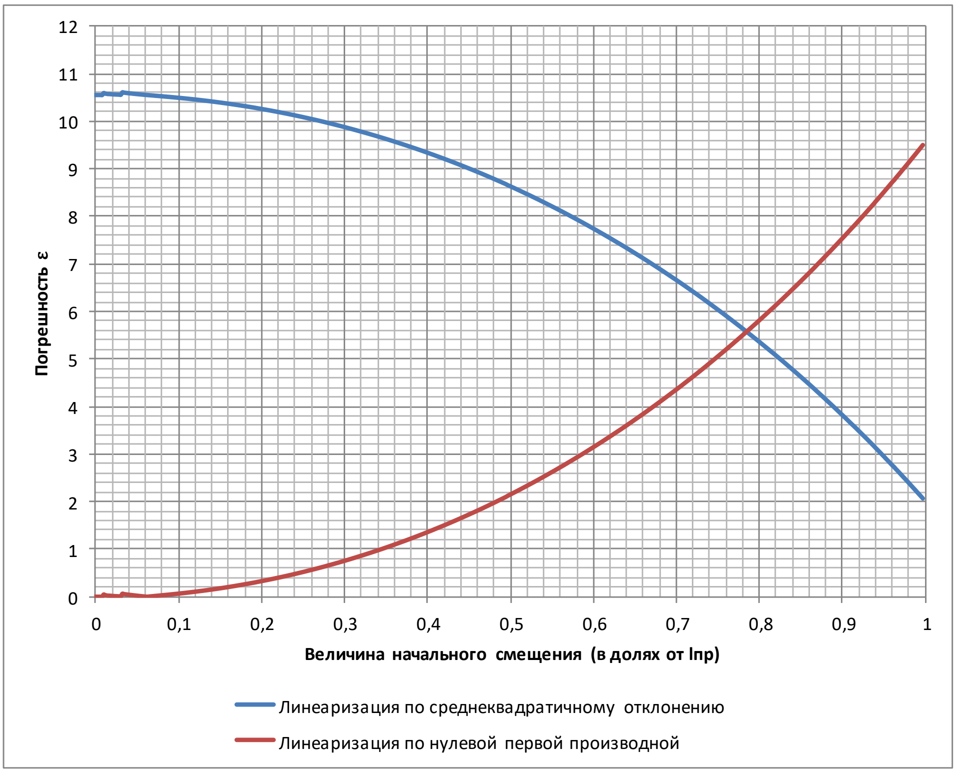

Рис. 4. Сравнительная диаграмма погрешностей $\varepsilon_{Vамп}(x_{0относ})$

Fig. 4. Comparative error diagram $\varepsilon_{Vamp}(x_{0relative})$

На представленной диаграмме можно определить значение интересующей нас величины $x_{0относ}$ как ~0,78. Этому значению соответствует погрешность в размере ~5 %, укладывающаяся в пределы инженерной погрешности. Таким образом, для жесткостных функций вида (1) можно установить следующие интервалы $x_{0\text{относ}}$, на которых уместно применять рассмотренные варианты аппроксимации:

$$\begin{cases} r_1(x) = c \cdot x, \\ \text{при } 0 \le x_{0относ} \le 0.78 \\ r_2(x) = \left(-\dfrac{3 \cdot a \cdot l^2}{5} + c \right) \cdot x, \\ \text{при } 0.78 < x_{0относ} \le 1 \end{cases} . \qquad (20)$$

Заключение

При использовании спектральных методов расчета многомерных динамических систем целесообразно применять методы аппроксимации исходной нелинейной динамической системы с реализацией критериев наилучшего приближения, в частности метод квадратичной аппроксимации.

Сравнительный анализ результатов погрешности использования моделей по значениям производной в точке исходного состояния покоя и моделей, сформированных по условиям квадратичной аппроксимации, показывает неоспоримое преимущество метода линеаризации с использованием аппроксимации.

Амплитудные значения перемещений нелинейной и линеаризованной по квадратичному критерию систем не имеют различий при проявлении собственных колебаний. При этом данное утверждение справедливо независимо от значений начальных условий. Погрешность амплитудных значений скоростей нелинейной и линеаризированных систем является функцией начальных условий. Так, при линеаризации по значению производной в нулевой точке погрешность величин скоростей может превышать 10 % при значительных отклонениях точек системы от положения равновесия. Полученные результаты позволяют сделать вывод о приемлемости спектральных методов при определении экстремальных величин напряженного состояния по амплитудным значениям перемещений динамической модели, линеаризованной с использованием методов аппроксимации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Балтина А. М. Оценка эффективности расходов государственных (муниципальных) учреждений // Финансы и кредит. 2011. № 13 (445). С. 57–62.
2. Суюмбаев Х. У., Ногеров И. А., Шогенов Б. В., Макшаева М. И. Оценка надежности оборудования АЭС в рамках линейно-спектральной теории сейсмостойкости // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2-1. С. 172.
3. Beléndez A., Beléndez T., Martínez F. S., Pascual C., Álvarez M. L., Arribas E. Exact solution for the unforced Duffing oscillator with cubic and quintic nonlinearities // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86. p. 1687-1700. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2986-8.
4. Kovacic I., Brennan M. J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. John Wiley and Sons, 2011. 392 p.
5. Beléndez A., Hernández A., Beléndez T., Pascual C., Álvarez M. L., Arribas E. Solutions for Conservative Nonlinear Oscillators Using an Approximate Method Based on Chebyshev Series Expansion of the Restoring Force // Acta Physica Polonica A. 2016. Vol. 130 (3). p. 667-678. https://doi.org/10.12693/APhysPolA.130.667.
6. Elías-Zúñiga A. “Quintication” method to obtain approximate analytical solutions of non-linear oscillators // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 243. p. 849-855. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.05.085.
7. Соболев В. И., Гаскин В. В., Снитко А. Н. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. Часть 1: Многоэтажные здания. Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1992. 216 с.
8. Петров В. В., Кривошейн И. В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала. М.: АСВ, 2009. 206 с.
9. Соболев В. И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного технического университета, 2002. 202 с.
10. Biryukov V. N., Semernik I. V. Testing of oscillating circuits ODE solving methods // Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). 2017. p. 268-271. https://doi.org/10.1109/RSEMW.2017.8103646.
11. Рутман Ю. Л., Островская Н. В. Динамика сооружений: сейсмостойкость, сейсмозащита, ветровые нагрузки. СПб.: СПбГАСУ, 2019. 253 с.

REFERENCES

1. Baltina AM. Evaluation of the efficiency of expenditures of state (municipal) institutions. *Finansy i kredit = Finance and credit*. 2011;13(445):57-62. (In Russ.).
2. Suyumbayev HU, Nogerov IA, Shogenov BV, Makshaeva MI. Reliability assessment of NPP equipment in the line-spectral theory of seismic. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya = Modern problems of science and education*. 2015;2-1:172. (In Russ.).
3. Beléndez A, Beléndez T, Martínez FS, Pascual C, Álvarez ML, Arribas E. Exact solution for the unforced Duffing oscillator with cubic and quintic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*. 2016;86:1687-1700. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2986-8.
4. Kovacic I, Brennan MJ. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. John Wiley and Sons; 2011. 392 p.
5. Beléndez A, Hernández A, Beléndez T, Pascual C, Álvarez ML, Arribas E. Solutions for Conservative Nonlinear Oscillators Using an Approximate Method Based on Chebyshev Series Expansion of the Restoring Force. *Acta Physica Polonica A*. 2016;130(3):667-678. https://doi.org/10.12693/APhysPolA.130.667.
6. Elías-Zúñiga A. “Quintication” method to obtain approximate analytical solutions of non-linear oscillators. *Applied Mathematics and Computation*. 2014;243:849-855. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.05.085.
7. Sobolev VI, Gaskin VV, Snitko AN. Dynamics and seismic resistance of buildings and structures. Part 1: Multi-storey buildings. Irkutsk: Irkutsk University Publ.; 1992. 216 p. (In Russ.).
8. Petrov VV, Krivoshein IV. Methods for calculating structures made of non-linearly deformable material. Moscow: DIA; 2009. 206 p. (In Russ.).
9. Sobolev VI. Discrete-continuous dynamic systems and vibration isolation of industrial screens. Irkutsk: Irkutsk State Technical University; 2002. 202 p. (In Russ.).
10. Biryukov VN, Semernik IV. Testing of oscillating circuits ODE solving methods. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*. 2017. p. 268-271. https://doi.org/10.1109/RSEMW.2017.8103646.
11. Rutman YL, Ostrovskaya NV. Dynamics of structures: seismic resistance, seismic protection, wind loads. St. Petersburg: SPbGASU; 2019. 253 p. (In Russ.).

Информация об авторах

В. И. Соболев,
доктор технических наук, доцент, профессор кафедры механики и сопротивления материалов,
Иркутский национальный исследовательский технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
e-mail: vladsobol@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0916-1604

Д. А. Кармазинов,
студент,
Иркутский национальный исследовательский технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1803-1270

Information about the authors

Vladimir I. Sobolev,
Dr. Sci (Eng.), Associate Professor,
Professor of the Department of Mechanics and Resistance of Materials,
Irkutsk National Research Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk, 664074, Russia,
e-mail: vladsobol@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0916-1604

Danil A. Karmazinov,
Student,
Irkutsk National Research Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk, 664074, Russia,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1803-1270

Вклад авторов

Авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Соболев В. И. несет ответственность за плагиат.

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article. Sobolev V. I. bears the responsibility for plagiarism.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Статья поступила в редакцию 30.06.2022.
Одобрена после рецензирования 14.07.2022.
Принята к публикации 18.07.2022.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests regarding the publication of this article.

The final manuscript has been read and approved by all the co-authors.

The article was submitted 30.06.2022.
Approved after reviewing 14.07.2022.
Accepted for publication 18.07.2022.