Научная статья
УДК 624.04
EDN: OBHCWT
DOI: 10.21285/2227-2917-2024-4-777-786

Совмещение параметрической дискретности и непрерывности в анализе динамических моделей сооружений

В.И. Соболев[1]✉, Д.А. Кармазинов[2], Т.Н. Черниговская[3]
[1,2]Иркутский национальный исследовательский технический университет, Россия, Иркутск,
[3]Иркутский государственный университет путей сообщения, Россия, Иркутск

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена методу построения динамических моделей, содержащих стержневые изгибаемые элементы с распределенными и сосредоточенными инерционными и жесткостными параметрами и их анализу на основе метода гармонического элемента. Расчет сооружений на вибрационные воздействия, осуществляется, как правило, на основе дискретизации масс. Использование таких методов связано с известными трудностями. Дискретные модели являются априорно приближенными с ограниченными возможностями оценки погрешности. Динамические параметры модели зависит от ее размерности, а также от методов преобразования. Численные результаты с массивами и матрицами большой размерности затрудняют возможность анализа и оценки результатов расчета. Расчеты сооружений на стационарные динамические воздействия, основанные на использовании элементов с распределенными и сосредоточенными массами, позволяют избежать перечисленных последствий полной дискретизации. Однако такие дискретно-континуальные (гибридные) динамические модели связаны с необходимостью сшивки разнородных элементов на этапе формирования и неизбежными трудностями решения таких «комбинированных» систем, содержащих обыкновенны дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Перечисленные проблемы разрешаются при использовании авторского метода гармонического элемента, осуществляющего узловую сшивку разнородных элементов, а также позволяющего получать решения в виде амплитуд колебаний узлов комбинированной модели по определенным необходимым направлениям. Указанные особенности позволяют выделить предложенный метод в отдельный класс с названием метода гармонических элементов.

Ключевые слова: изгибаемые элементы, сосредоточенные массы, уравнения Эйлера-Бернулли, уравнения динамики

Для цитирования: Соболев В.И., Кармазинов Д.А., Черниговская Т.Н. Совмещение параметрической дискретности и непрерывности в анализе динамических моделей сооружений // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2024. Т. 14. № 4. С. 777–786. https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-4-777-786. EDN: OBHCWT.

Original article

Combining parametric discreteness and continuity for analyzing dynamic models of structures

Vladimir I. Sobolev[1]✉, Danil A. Karmazinov[2], Tatyana N. Chernigovskaya[3]
[1,2]Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia
[3]Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Abstract. This paper describes a method for building dynamic models that contain rod bending elements with distributed and concentrated inertial and stiffness parameters, and their analysis based on the harmonic element method. As a rule, the vibration effects of structures are calculated on the basis of mass discretization, although the application of such methods entails certain difficulties.

Discrete models are considered to be a priori approximations with limited possibilities of error estimation. The dynamic parameters of the model vary depending on its dimensionality as well as on the transformation methods. Numerical results with arrays and matrices of high dimensionality make it difficult to analyze and evaluate the calculation results. Therefore, structural calculations for stationary dynamic effects based on the use of elements with distributed and concentrated masses prevent the above-mentioned consequences of full discretization. However, such discrete-continuum (hybrid) dynamic models require the sewing of heterogeneous elements at the formation stage. In addition, some complications occur when solving these combined systems containing ordinary differential equations and partial differential equations. These issues can be solved by using the author's harmonic element method, implementing the nodal sewing of heterogeneous elements, as well as providing solutions as amplitudes of oscillations of the combined model nodes along certain necessary directions. The specified features of the proposed method allow us to identify it as a separate class with the name of the harmonic element method.

Keywords: bendable elements, concentrated masses, Euler-Bernoulli equations, equations of dynamics

For citation: Sobolev V.I., Karmazinov D.A., Chernigovskaya T.N. Combining parametric discreteness and continuity for analyzing dynamic models of structures. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate.* 2024;14(4):777-786. (In Russ.). https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-4-777-786. EDN: OBHCWT.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый подход требует анализа возможности построения динамической системы, совмещающей наличие элементов с распределенными и сосредоточенными инерционными и жесткостными параметрами. Сложной системой принято называть систему, состоящую из разнородных элементов, в совокупности определяющих ее новые свойства. Вышеуказанное определение не обладает достаточной конкретностью, в связи с чем требуется указать критерии, которые позволят установить отношение некоторых элементов к тому или иному варианту системы.

Определение этого понятия изложено в принципах системного анализа [1, 2], в соответствии с которыми «система» должна удовлетворять ряду известных принципов:

– конечной цели;
– единства;
– связанности;
– модульного построения.

Динамической системой принято считать формализованное математическое отображение физической системы, позволяющее исследовать свойства и состояние физической системы [4, 3].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Возможность дискретного и непрерывного в моделировании динамических систем

В более ранних работах авторов [5–7] обоснованы и приведены формализованные соображения о целесообразности разработки и применения в расчетной практике моделей, отображающих динамику взаимодействия в системе элементов с непрерывными и сосредоточенными свойствами распределения инерционных величин – комбинированных динамических моделей (КДМ).

Необходимость формирования комбинированной динамической системы возникает для адекватного отображения динамических процессов в системах с нерегулярными дискретными и непрерывными параметрическими включениями [8, 9]. К таким динамическим системам относятся расчетные модели жилых и общественных зданий и сооружений, несущие конструкции которых имеют непрерывное, нерегулярное распределение инерционных параметров. Для промышленных сооружений свойственно наличие дискретных инерционных элементов, представленных технологическим оборудованием.

Отдельные конструктивные элементы с непрерывным распределением инерционных параметров интерпретируются в виде дискретных инерционных включений (например, диски перекрытий зданий при горизонтальных колебаниях). Таким образом, при горизонтальных колебаниях математическая модель здания должна сочетать элементы с распределенными инерционными и жесткостными параметрами, представленными вертикальными несущими конструкциями, с дискретными элементами, представленными дисками перекрытий (рис. 1).

Возникает необходимость формирования комбинированной динамической системы [8, 9]. Возникают определенные трудности при попытке непосредственно формализовать

КДМ средствами математического анализа. Так, при совмещении дискретных и континуальных компонентов таких систем требуется совмещение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных соответственно, попытки совместного решения которых влекут многочисленные трудности [10].

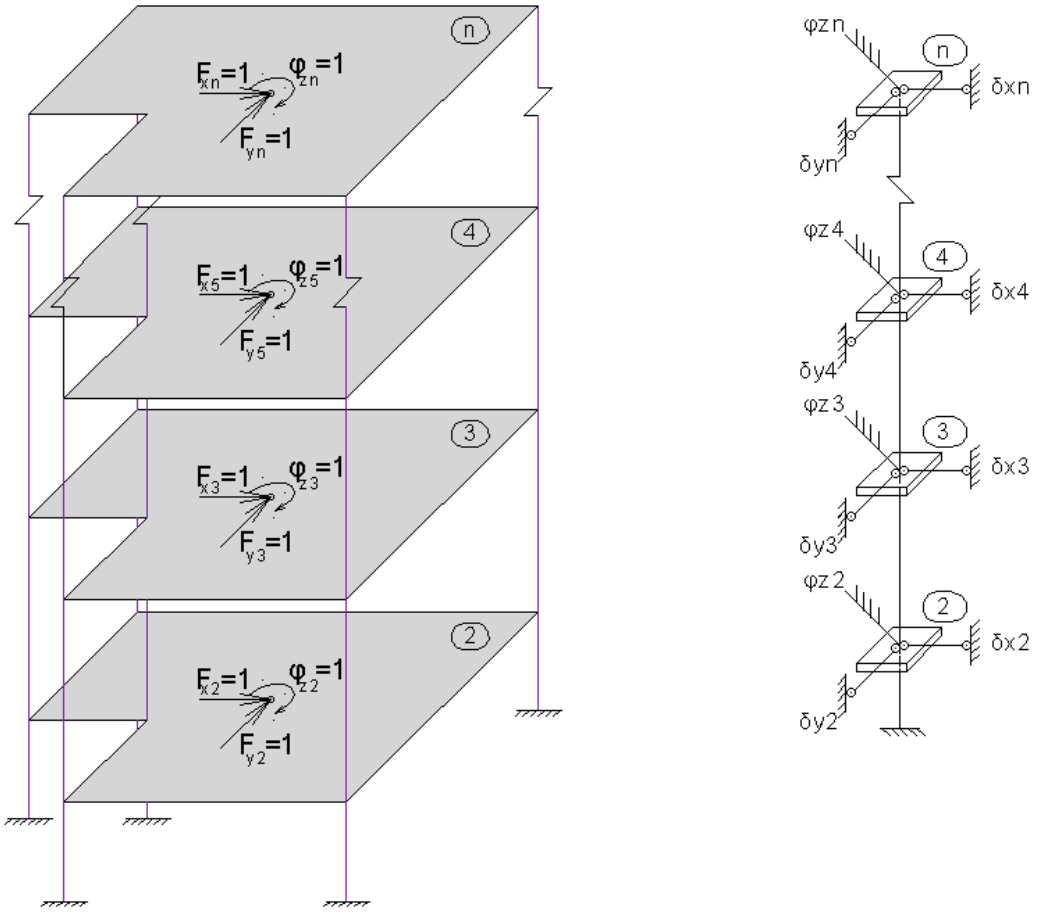

Рис. 1. Многоэтажное здание и его расчетная схема при горизонтальных динамических воздействиях, вертикальные элементы условно обозначают несущие конструкции с распределенными массами, перекрытия представлены твердыми телами
Fig. 1. A multi-storey building and its design scheme under horizontal dynamic influences, vertical elements conventionally denote load-bearing structures with distributed masses, overlaps are represented by solids

Действительно, для возможности моделирования сложного непрерывного процесса на уровне некоторой системы возникает необходимость его дискретизации.

Весьма распространены [11–13] обсуждения, касающиеся сопоставлению дискретных и континуальных способов аппроксимации. Выделим наиболее существенные аргументы в пользу тех и других:

– большая часть данных, с которыми приходится оперировать в прикладных исследованиях, могут быть получены лишь с некоторой точностью. Верхняя граница уровня точности определяется значением ошибки, вычислительной или измерительной.

Следствием данного обстоятельства является дискретность данных;

– в тех ситуациях, когда желательно использование непрерывных переменных, всегда можно аппроксимировать непрерывные переменные (как и непрерывные параметры) с наперед заданной точностью определяющими дискретными величинами;

– при работе с непрерывными переменными и параметрами возникает ряд чисто математических ограничений и сложностей.

При этом, преимущества непрерывных методов столь же очевидны и аргументированы:

– при дискретизации параметров реальной физической системы полученным результирующим числовым набором затруднительно обойтись без функциональной акппроксимации этого набора. Обосновано это тем, что дискретизированные результаты теряют свойство исходной аналитичности и часто нуждаются в дополнительных процедурах функционального отображения;

– при расчетах и моделировании динамики сложных сооружений проблемы физической и геометрической разнородности осложняются проблемой размерности, поскольку порядки систем уравнений, полученных в результате дискретизации, а также количество неизвестных, достигают иногда миллионов. Это приводит к необходимости применения специальных технологий формирования и преобразования разряженных матриц [14];

– использование современной вычислительной техники вкупе с развитыми вычислительными алгоритмами позволяет получить решение не только в численном, но и в аналитическом виде.

В качестве примеров программ, реализующих подобный подход, можно привести системы Maple, Mathcad, Mathematica и Magma [15].

Очевидно, что в наиболее общем виде каркасное сооружение может быть представлено следующими элементами: пластины, балки с распределенными параметрами масс и упругости, твердые тела, сосредоточенные массы.

При этом в качестве узловых соединений могут быть использованы узлы с наличием классических линейных и угловых связей строительной механики [16, 17]. Учитывая разнообразие узловых связей, можно сделать вывод о том, что преимущества дискретных и непрерывных свойств подсистем могут быть взаимно дополняемыми.

Следовательно, можно сделать следующие выводы:

– невозможность непосредственного аналитического описания сооружения в целом совместима с аналитической формализацией балок;

– использование дискретных элементов в ряде случаев неизбежно требует использования узлов и соответствующих узловых связей;

– граничные условия элементов с распределенными параметрами при достаточной факторизации и обоснованности узловых связей обеспечивают единственность решения;

– узлы соединения как дискретных, так и континуальных динамических элементов всегда можно использовать для приложения в них внешних сосредоточенных сил;

– система разрешающих уравнений может быть формализуема на основе динамического равновесия по направлениям связей узлов.

Метод динамических жесткостей, метод гармонического элемента

При анализе динамического состояния сложных механических систем построение моделей стационарной динамики оказывается весьма трудоемкой задачей. Морис Био, как однин из возможных вариантов решения, предлагает метод динамических жесткостей (Coupled Oscillations of Aircraft), являющийся развитием метода цепных дробей. Лежащий в его основе принцип (Structural Topology Optimization of Tall Buildings for Dynamic Seismic), а также особенности его приложения, излагаются в [18, 19].

Дадим здесь лишь краткое описание ключевого принципа описываемого метода: анализируемую континуальную механическую модель подвергают дроблению на составные части, ключевым условием которого является формирование элементов с достаточно просто формализующимися функциями динамических жесткостей. Важная особенность классического метода динамических жесткостей состоит в использовании линейных функций жесткости. Последнее обстоятельство приводит к выполнению принципа суперпозиции, позволяющего достаточно просто сформировать разрешающую систему уравнений. «Сшивка» решений ансамбля элементов модели обеспечивается посредством сопряжения выделенных элементов системы в их общих узловых точках. «Сшивка» решений является нетривиальной задачей. Для облегчения ее решения можно ввести понятие связей в строительной механике. Данный шаг позволит аналитически учесть граничные условия элементарных элементов и произвести их «сшивку» в единую систему. Кроме вышеописанного использование связей, традиционного для строительной механики, можно применить апробированные методы системного анализа и строительной механики в процессе моделирования, анализа и получения решения. В качестве пояснения проиллюстрируем изображением перекрестного набора балок с наложением связей, препятствующих перемещениям узлов набора и поворотам поперечных сечений балок на плоскости (рис. 2). Эти связи пронумеруем для упорядочивания в заданной системе. Исключение процедуры дискретизации балочных элементов, возможное при наличии только лишь балочных элементов, позволяет значительно уменьшить размерность решаемой задачи, а также иметь аналитическую интерпретацию результатов анализа стационарного динамического процесса.

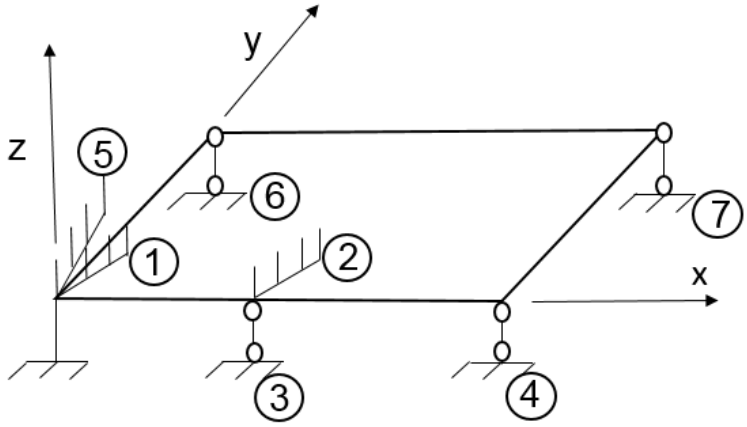

Рис. 2. Пример сшивки балочных элементов с обозначением связей:
1, 2 – угловые связи в плоскости xoz; 5 – угловые связи в плоскости yoz;
3, 4, 6, 7 – линейные связи по направлению оси z
Fig. 2. Example of crosslinking of beam elements with the designation of connections:
1, 2 – angular connections in the xoz plane; 5 – angular connections in the yoz plane;
3, 4, 6, 7 – linear connections in the direction of the z axis

Следует указать пределы применимости метода динамических жесткостей. Так, в своей классической формулировке метод динамических жесткостей может быть применим лишь в отношении стержневых механических систем. Данное обстоятельство не является существенным ограничением использования данного метода при анализе динамических характеристик промышленных зданий, поскольку большая их часть представляет собой системы с полным каркасом, т. е. они являются стержневыми.

Рассмотрим модификацию метода динамических жесткостей следующего рода: к стержневому элементу с наложенными по его концам связями приложим сосредоточенное продольное воздействие N. Пусть также данный элемент имеет изгибную жесткость EJ и совершает вынужденные стационарные гармонические колебания с некоторой частотой ω. Данный элемент определим как гармонический конечный элемент в том смысле, что он моделирует не статические, но динамические жесткостные характеристики некоторого реального элемента, т. е. отражает способность реальных стержневых элементов менять свои жесткостные характеристики в условиях внешних гармонических воздействий.

Запишем уравнение динамического состояния балки в виде (1), известном под названием уравнения Эйлера-Бернулли [20]:

$$\rho V_{tt} + EJV_{xxxx} - NV_{xx} = 0 \qquad (1)$$

Стационарное динамическое состояние балки с постоянной частотой определяется его частным решением вида:

$$V(x) = Y(x)\,sin(\omega t)$$

И вектором граничных условий:

$$Y = (Y(0), Y_x|_{x=0}, Y(l), Y_{xx}|_{x=a})^{\mathrm{T}}, \qquad (2)$$

компоненты которого расположены в порядке нумерации связей граничных узлов балки.

Использование частного решения уравнения (1) позволяет определить динамическое состояние балки.

Вектор (2) определяет краевые условия для уравнения (1). Если для граничных точек каждого элемента задать поочередное гармоническое единичное перемещение связей по их направлениям (гармоническое воздействие), то во всех связях, наложенных на краевые узлы элемента, возникнут соответствующие гармонические реакции с частотой заданного гармонического перемещения. Полученная матрица амплитуд динамических реакций в наложенных связях определит динамическое состояние элемента при единичных гармонических воздействиях. Принимая во внимание факт линейности рассматриваемой задачи, получаем, что состояние элемента при воздействиях, отличных от единичных, определено и, следовательно, определено состояние всего ансамбля гармонических конечных элементов. Проиллюстрируем изложенное на примере. Пусть расчетная схема балки, расположенной по оси X, содержит три связи (рис. 3). Возможное количество связей граничных узлов балки при плоских изгибных колебаниях может быть равным от двух до четырех. Примем положительным направление реактивного момента в угловой связи, направление которого совпадает с направлением вращения часовой стрелки. Положительным направлением каждой силы будем считать направление действия вдоль положительного направления оси (рис. 4). Для определения элементов матрицы амплитуд динамических реакций вынужденных колебаний балки подставим искомое решение вида:

$$V(x) = Y(x)\,sin(\,\omega t)$$

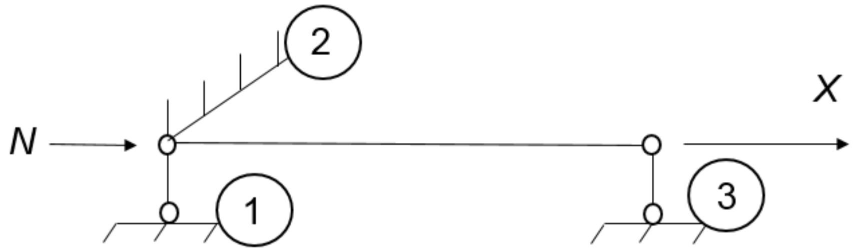

Рис. 3. Вид балочного элемента и нумерация связей
Fig. 3. Type of beam element and numbering of links

Выполнив подстановку в уравнение (1) искомого решения и сократив обе части полученного уравнения на $sin(\omega t)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида для амплитуды $Y(x)$:

$$Y^{(IV)}(x) - \frac{NY^{(2)}(x)}{EJ} - Y(x)\frac{\omega^2\rho}{EJ} = 0 \quad (3)$$

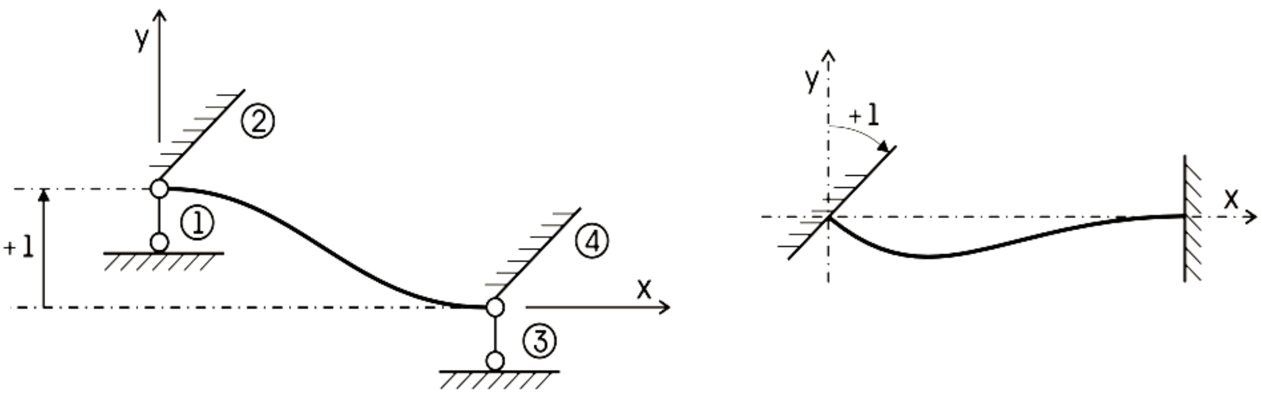

Рис. 4. Нумерация связей и реакций в связях изгибаемого элемента
Fig. 4. Numbering of bonds and reactions in the bonds of the bent element

Определив квадраты корней биквадратного характеристического уравнения (3) в виде

$${\mu^2}_{12} = -\frac{N}{2EJ} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2\rho}{EJ}}$$

и обозначив эти величины в виде:

$$\mu_1 = q, \quad \mu_2 = -q, \quad \mu_3 = is, \quad \mu_4 = -is$$

В которых

$$q = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2\rho}{EJ}}}$$

$$s = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2\rho}{EJ}}}$$

Можем получить частное решение уравнения (3), отображающее вынужденные стационарные колебания с частотой ω , амплитуды которого могут быть представлены в виде линейной комбинации четырех линейно независимых функций, образующих базисную вектор функцию:

$$Y(x) = H(x)\,\vec{C} \quad (4)$$

$$H(x) = (e^{qx}, e^{-qx}, sin(\,sx), cos(\,sx))$$

Здесь вектор $\vec{C}$ является вектором коэффициентов линейной комбинации линейно независимых функций, формирующих базисную вектор-функцию $H(x)$. Краевые условия решения уравнения (3) сформированы в порядке нумерации связей.

Для выбранной расчетной схемы балки справедливо тождество $Y_{xx}|_{x=a} \equiv 0$. Для определения функции $Y(x)$ коэффициенты линейных комбинаций решений при задании единичных гармонических перемещений связей в порядке их нумерации определяются в виде матрицы С путем поочередного задания единичных амплитуд перемещений по направлениям связей с номерами 1, 2, 3.

Векторы амплитуд заданных единичных перемещений, упорядоченные по номерам связей, образуют матрицу L. Матрицы С и L имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы С определяются из решения систем уравнений:

$$AC = L \qquad (5)$$

где А – матрица, образованная из базисной вектор-функции $H(x)$ следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} H(0) \\ H_x(x)|_{x=0} \\ H(l) \\ H_{xx}(x)|_{x=a} \end{pmatrix}^T$$

Матрица А при поочередных в порядке их нумерации единичных гармонических перемещениях связей (матрица амплитуд гармонических реакций) определяется в виде:

$$R = -EJC^TH \qquad (6)$$

здесь

$$H = (H_{xxx}^T(x)|_{x=0}, H_{xx}^T(x)|_{x=0}, H_{xxx}^T(x)|_{x=a})$$

Вектор Y амплитуд узловых перемещений, соответствующий вектору F амплитуд гармонических сосредоточенных силовых воздействий по направлениям узловых связей, определяется решением системы линейных уравнений вида:

$$RY = F$$

Преобразовав, имеем

$$-EJ(A^{-1}L)^TH = F$$

Функция $Y(x)$ амплитуд перемещений оси балки (функция формы вынужденных колебаний) при заданной узловой форме F силового гармонического воздействия имеет вид:

$$Y(x) = Y^TC^TH^T(x)$$

Изложенные методы использованы при анализе виброактивности ряда обогатительных фабрик компании «АЛРОСА», а также в разработке системы виброзащиты конструкций от динамических воздействий работы технологического оборудования, расположенного на верхних этажах фабрик. Использование изложенной методики позволило убедиться в формировании динамических моделей гораздо меньших размерностей по сравнению с моделями, сформированными на основе дискретизации масс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из всего вышеизложенного, можно сделать следующие выводы:

1. Предлагаемый способ формирования модели позволяет совмещать элементы с сосредоточенными и распределенными инерционными параметрами в единой динамической системе.
2. Динамическое состояние такой системы формализуемо с помощью системы уравнений динамического равновесия, сформированной относительно узловых точек при помощи матриц динамических реакций бесконечномерных и дискретных элементов по направлениям степеней свободы динамической системы.
3. Матрицы динамических реакций в узловых связях по направлениям узловых степеней свободы бесконечномерных изгибаемых элементов (балок с распределенными инерционными параметрами), полученных посредством частных решений уравнения Эйлера-Бернулли, можно сформировать в виде амплитуд динамических реакций системы, что позволяет использовать узловое (дискретное) описание динамической системы с разнородными граничными условиями и сложными границами расчетных областей.
4. Предложенный подход позволяет избежать трудностей в получении решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений динамики и уравнений в частных производных Эйлера-Бернулли посредством «сшивки» решений.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. Ленинград: Ленинградский университет, 1988. 227 с.
2. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач / пер с англ. М.А. Зуев; под ред. А.И. Горлина. М.: Радио и связь, 1990. 538 с.
3. Poincare H. Les Méthodes Nouvelles De La Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892. 408 p.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
5. Соболев В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов. Иркутск: Иркутский национальный исследовательский технический университет, 2002. 201 с.
6. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Метод гармонического элемента в моделировании стационарных динамических процессов // Вестник ВСГТУ. 2010. № 1. С. 43–51. EDN: MLJWYL.
7. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний тонкой пластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 4 (16). С. 28–32. EDN: JURRIN.
8. Гаскин В.В., Снитко А.Н., Соболев В.И. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. Иркутск: Иркутский государственный университет, 1992. 164 с. EDN: WHZMGH.
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений / пер. с англ. Л.Ш. Климник, А.В. Швецова М.: Стройиздат,1979. 320 с.
10. Гальперин И. Введение в теорию обобщенных функций / пер. с англ. М.С. Агранович; под ред. Г.Е. Шилова. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 64 с.
11. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
12. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М., Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. Ч. 1. 203 с.
13. Галиев К.С., Гордон Л.А., Розин Л.А. О построении универсальной матрицы жесткости в методе конечного элемента // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1974. Т. 105. С. 174–188.
14. Петряков В.Б. Конструирование радиоэлектронной аппаратуры. М.: Советское радио, 1969. 208 с.
15. Девенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. Системы и алгоритмы алгебраических вычислений / пер. с фр. Е.В. Панкратьева; под ред. А.В. Михалёва. М.: Мир, 1991. 350 с.
16. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика) / пер. с англ.; под ред. Д.М. Гвишиани. М.: Прогресс, 1971. 340 с.
17. Хаяси Тихиро Вынужденные колебания в нелинейных системах / пер. с англ. В.И. Бурдина; под ред. А.И. Лурье. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 204 с.
18. Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д., Косарев О.И., Павлов Б.И., Федосеев Ю.Н. Применение ЭВМ для расчета многосвязных систем методом динамической жесткости // Решение задач машиноведения на ЭВМ. М.: Наука, 1975. С. 42–47.
19. Колоушек В., Бабушка И. Динамика строительных конструкций / пер. с чеш. Г.Д. Рычагов, Г.А. Якушева. М.: Стройиздат, 1965. 632 с.
20. Корнейчук Н.П., Личун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова Думка, 1988. 250 с.

REFERENCES

1. Gubanov V.A., Zakharov V.V., Kovalenko A.N. *Introduction to Systems Analysis.* Leningrad: Leningrad University, 1988. 227 p. (In Russ.).
2. Klir Dzh. Systemology. Automation of Solving Systemic Problems, 1990, 538 p. (Russ. ed.: *Sistemologiya. Avtomatizatsiya resheniya sistemnykh zadach*. Moscow: Radio and Communications, 1990. 538 p.).
3. Poincare H. *Les Méthodes Nouvelles De La Mécanique Céleste.* Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892. 408 p.
4. Butenin N.V., Neimark Yu.I., Fufaev N.A. *Introduction to The Theory of Nonlinear Oscillations.* Moscow: Nauka, 1976. 384 p. (In Russ.).
5. Sobolev V.I. *Discrete-Continuous Dynamic Systems and Vibration Isolation of Industrial Screens.* Irkutsk: Irkutsk National Research Technical University, 2002. 201 p. (In Russ.).

6. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Method of Harmonic Element in Stationary Dynamic Process Modeling. *Vestnik VSGTU.* 2010;1:43-51. (In Russ.). EDN: MLJWYL.
7. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Construction of A Rectangular Harmonic Element for Modeling the Vibrations of a Thin Plate. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling.* 2007;4(16):28-32. (In Russ.). EDN: JURRIN.
8. Gaskin V.V., Snitko A.N., Sobolev V.I. *Dynamics and Seismic Resistance of Buildings and Structures.* Irkutsk: Irkutsk State University, 1992. 164 p. (In Russ.). EDN: WHZMGH.
9. Klaf R., Penzien Dzh. Dynamics of Structures, 1979, 320 p. (Russ. ed.: *Dinamika sooruzhenii.* Moscow: Stroyizdat, 1979. 320 p.).
10. Gal'perin I. Introduction to the Theory of Generalized Functions, 1954, 64 p. (Russ. ed.: *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsii.* Moscow: Foreign Literature Publishing House, 1954. 64 p.).
11. Akhiezer N.I. *Lectures on Approximation Theory.* Moscow: Nauka, 1965. 407 p. (In Russ.).
12. Bernshtein S.N. *Extremal Properties of Polynomials and Best Approximation of Continuous Functions of One Real Variable.* Moscow, Leningrad: Main Editorial Board of General Technical Literature, 1937. P. 1. 203 p. (In Russ.).
13. Galiev K.S., Gordon L.A., Rozin L.A. On The Construction of a Universal Stiffness Matrix in The Finite Element Method. *Izvestiya VNIIG im. B.E. Vedeneeva*. 1974;105:174-188.
14. Petryakov V.B. *Design of Radio-Electronic Equipment.* Moscow: Sovetskoe Radio, 1969. 208 p. (In Russ.).
15. Devenport Dzh., Sire I., Turn'e E. Computer Algebra. Systems and Algorithms for Algebraic Calculations, 1991, 350 p. (Russ. ed.: *Komp'yuternaya algebra. Sistemy i algoritmy algebraicheskikh vychislenii.* Moscow: Mir, 1991. 350 p.).
16. Forrester Dzh. Fundamentals of Enterprise Cybernetics (Industrial Dynamics), 1971, 340 p. (Russ. ed.: *Osnovy kibernetiki predpriyatiya (industrial'naya dinamika)*. Moscow: Progress, 1971. 340 p.).
17. Khayasi Tikhiro Forced Oscillations in Nonlinear Systems, 1957, 204 p. (Russ. ed.: *Vynuzhdennye kolebaniya v nelineinykh sistemakh.* Moscow: Foreign Literature Publishing House, 1957. 204 p.).
18. Airapetov E.L., Genkin M.D., Kosarev O.I., Pavlov B.I., Fedoseev Yu.N. Application of A Computer for Calculating Multi-Connected Systems by The Dynamic Stiffness Method. In: *Solving Problems of Mechanical Engineering On a Computer.* Moscow: Nauka, 1975. p. 42–47. (In Russ.).
19. Koloushek V., Babushka I. Dynamics of Building Structures, 1965, 632 p. (Russ. ed.: *Dinamika stroitel'nykh konstruktsii.* Moscow: Stroyizdat, 1965. 632 p.).
20. Korneichuk N.P., Lichun A.A., Doronin V.G. *Approximation with Constraints.* Kyiv: Naukova Dumka, 1988. 250 p. (In Russ.).

Информация об авторах

Соболев Владимир Иванович,
д.т.н., профессор,
профессор кафедры механики
и сопротивления материалов,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
✉e-mail: vladsobol@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0916-1604
Author ID: 4041

Кармазинов Данил Андреевич,
инженер-конструктор
ООО «СтройПроектСервис»,
664074, г. Иркутск, ул. Леси Украинки, д. 35,
Россия,
аспирант,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
https://orcid.org/ 0000-0003-1803-1270
Author ID: 1182680

Information about the authors

Vladimir I. Sobolev,
Dr. Sci (Eng.), Professor, Professor
of the Department of Mechanics
and Resistance of Materials,
Irkutsk National Research
Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia,
✉e-mail: vladsobol@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0916-1604
Author ID: 4041

Danil A. Karmazinov,
Design Engineer
of StroyProektService LLC,
35 Lesi Ukrainka St., Irkutsk 664074, Russia,
Postgraduate Student,
Irkutsk National Research
Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk 664074,
Russia,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
https://orcid.org/ 0000-0003-1803-1270
Author ID: 1182680

Черниговская Татьяна Николаевна,
старший преподаватель кафедры математики,
Иркутский государственный университет
путей сообщения,
664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15,
Россия,
e-mail: tannikch@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1525-4663
Author ID: 520237

Tatyana N. Chernigovskaya,
Senior Lecturer
of the Department of Mathmatics,
Irkutsk State Transport University,
15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074,
Russia,
e-mail: tannikch@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1525-4663
Author ID: 520237

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests regarding the publication of this article.

The final manuscript has been read and approved by all the co-authors.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 27.09.2024.
Одобрена после рецензирования 07.10.2024.
Принята к публикации 08.10.2024.

Information about the article

The article was submitted 27.09.2024.
Approved after reviewing 07.10.2024.
Accepted for publication 08.10.2024.