

Об асимптотических особенностях n -сферС.С. Боков^{1✉}, Р.Н. Шматков²¹Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия²Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск, Россия

Аннотация. Трехмерная сфера, в силу своего удобства, простоты и универсальности, применяется во многих областях современной науки и техники, является объектом компьютерного моделирования. Из-за повышения количества параметров современных моделей, в целях адекватности моделирования, необходимо рассматривать более сложную, чем трехмерная сфера, область ограничения параметров моделирования – n -мерную сферу (или n -сферу). Так, например, в астрономии для моделирования движения небесных тел применяется уже четырехмерная сфера, поскольку к трем известным параметрам (длина, ширина, высота) движения материальной точки добавляется четвертый параметр – время. В других областях науки количество параметров моделирования возрастает и, тем самым, увеличивается размерность сферы, их ограничивающей. В итоге возникает вопрос: до каких пор можно увеличивать количество параметров моделирования, чтобы модель была релевантной. В настоящей статье делается попытка ответить на данный вопрос. В статье рассматриваются асимптотические особенности параметров n -сфер (при неограниченном увеличении размерности сферы, и количества параметров моделирования), приводится аналитическое решение указанной проблемы и ее численное моделирование. Выдвигается гипотеза об ограниченном использовании n -сфер для моделей большого порядка. Статья может представлять интерес для научных работников и студентов, изучающих численное моделирование и поведение гиперсфер на бесконечности.

Ключевые слова: n -сфера, n -шар, гиперсфера, моделирование, задачи оптимизации

Для цитирования: Боков С.С., Шматков Р.Н. Об асимптотических особенностях n -сфер // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2025. Т. 15. № 1. С. 64–72. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2025-1-64-72>. EDN: XSVWXG.

Original article

On asymptotic features of n -spheresSergei S. Bokov^{1✉}, Ruslan N. Shmatkov²¹Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia²Siberian Transport University, Novosibirsk, Russia

Abstract. As an object of computer simulation, a three-dimensional sphere is used in many areas of contemporary science and technology due to its convenience, simplicity, and versatility. An increased number of parameters for contemporary models complicates the limiting area of simulation parameters to an n -dimensional sphere (n -sphere). For example, a four-dimensional sphere used in astronomy to simulate the movement of celestial bodies includes a fourth parameter of time in addition to the length, width, and height of material point movement. In other areas of science, the growing number of simulation parameters increases the dimensionality of the limiting sphere. This sets the problem of the limit number of simulation parameters for maintaining the relevance of the model. The article examines the asymptotic features of n -sphere parameters at an unlimited increase in the sphere dimensionality and number of simulation parameters. For providing an analytical solution to the problem and its numerical simulation, a hypothesis about the limited use of n -spheres for high-order models is put forward. The article may be of interest to researchers and students studying numerical simulation and infinite behavior of hyperspheres.

© Боков С.С., Шматков Р.Н., 2025

Keywords: n-sphere, n-ball, hypersphere, modeling, optimization problems

For citation: Bokov S.S., Shmatkov R.N. On asymptotic features of n-spheres. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2025;15(1):64-72. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2025-1-64-72>. EDN: XSVWXG.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день существует множество задач оптимизации и классификации из различных областей знания, в которых рассматриваемые параметры представлены n-сферами (гиперсферами). Например, задачи машинного обучения, оптимального управления и ряд других [1–3]. Актуальной проблемой является решение конкретных задач цифровизации и применения информационных технологий как в отдельных отраслях народного хозяйства, так и в строительстве в частности [4, 5]. Так, например, гиперсферы минимального объема в многомерном пространстве используются для описания распределения данных об энергопотреблении зданий [6]. Рассматривая n-сферы (или n-шары) порядка от $n=4$ и более, возникает задача представления их на размерностях меньшего порядка. Далее в статье понятие n-сфера (гиперсфера) будет применяться как для описания класса n-мерных поверхностей, так и для n-мерных геометрических тел, т. е. n-шаров, подразумевая, что из контекста понятно, о какой именно характеристике идет речь. Рассмотрим как изменяются площади поверхности S_n и объемы V_n в зависимости от n для того, чтобы перейти к заданию граничных условий в задачах оптимизации.

Для n-сферы размерности n (в-мерном евклидовом пространстве) площадь поверхности S_{n-1} и объем V_n , ограниченный ею (объем n-шара), можно рассчитать по формулам [7–9]:

$$S_{n-1} = n \cdot C_n \cdot R^{n-1} \quad (1)$$

$$V_n = C_n \cdot R^n, \quad (2)$$

где

$$C_n = \pi^{n/2} / \Gamma(n/2 + 1), \quad (3)$$

а $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Изучим как ведет себя площадь поверхности n-сферы при росте размерности пространства n . Не уменьшая общности, принимаем радиус n-сферы $R=1$.

Рассмотрим два случая:

$$\text{I) } n = 2k \quad \text{II) } n = 2k + 1 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\text{I) } S_{2k} = 2k \cdot C_{2k} = 2k \cdot \pi^k / \Gamma(k + 1) =$$

Так как для любого целого неотрицательного n верно $\Gamma(n + 1) = n!$, то

$$= 2k \cdot \pi^k / k! = 2 \cdot \pi^k / (k - 1)! =$$

Согласно формуле Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$, выполним замену $k-1=m$:

$$= \frac{2 \cdot \pi^{m+1}}{\sqrt{2\pi m} (m/e)^m} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}} \cdot \left(\frac{\pi e}{m}\right)^m$$

При $m \rightarrow \infty$ получим:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2(m+1)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}} \cdot \left(\frac{\pi e}{m}\right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi e}{m}\right)^m = 0 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\ln\left(\frac{\pi e}{m}\right)^m} = 0 \cdot e^{\lim_{m \rightarrow \infty} m \ln\left(\frac{\pi e}{m}\right)} = 0 \cdot e^{\lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot (\ln \pi + \ln e - \ln m)} = \\ &= 0 \cdot e^{\lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot (\ln \pi + 1 - \ln m)} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Для случая II)

$$S_{2k+1} = (2k+1) \cdot C_{2k+1} = (2k+1) \cdot \pi^{2k+1/2} / \Gamma(2k+1/2+1)$$

Выполним замену $\frac{2k+1}{2} = p$, тогда

$$S_{2k+1} = 2p \cdot \pi^p / \Gamma(p+1) = \frac{2p \cdot \pi^p}{p!}$$

Следовательно, этот случай сводится к случаю I). Отсюда можно заключить, что при $n \rightarrow \infty$ площадь поверхности n-сферы $S_n \rightarrow 0$.

Аналогично, рассмотрим поведение объема V_n n-шара при росте размерности пространства n. Не уменьшая общности, принимаем радиус n-шара $R=1$.

Аналогично нахождению предела площади поверхности гиперсферы, нахождение предела объема гиперсферы можно разделить на два случая:

I) $n = 2k$ II) $n = 2k+1$ при $n \rightarrow \infty$.

$$I) V_{2k} = C_{2k} = \pi^k / \Gamma(k+1) = \pi^k / k! = \frac{\pi^k}{\sqrt{2\pi k} (k/e)^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \left(\frac{\pi e}{k}\right)^k$$

При $k \rightarrow \infty$ получим:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \left(\frac{\pi e}{k}\right)^k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi e}{k}\right)^k = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$II) V_{2k+1} = C_{2k+1} = \pi^{2k+1/2} / \Gamma(2k+1/2+1) = [\text{замена } 2k+1/2 = p] = \pi^p / p!$$

Следовательно, второй случай сводится к первому. А значит и объем V_n n-шара при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Частично такой же результат получен в [10].

Рассчитаем значения для первых двадцати пяти S_n и V_n . Для расчета был написан алгоритм на языке Python (рис. 1). При формировании алгоритма было использовано следующее разложение для (3), указанное в [10]:

$$C_{2k} = \pi^k / k! \text{ и } C_{2k+1} = 2^{k+1} \cdot \pi^k / (2k+1)!! \quad (4)$$

Полученные значения с точностью до 6-го знака представлены в таблице.

Значения параметров n-сфер

The values of the n-spheres parameters

n	S_n	V_n
1	2,000000	2,000000
2	6,283185	3,141593
3	12,566371	4,188790
4	19,739209	4,934802
5	26,318945	5,263789
6	31,006277	5,167713
7	33,073362	4,724766
8	32,469697	4,058712
9	29,686580	3,298509
10	25,501640	2,550164
11	20,725143	1,884104
12	16,023153	1,335263

Окончание табл.

n	S_n	V_n
13	11,838174	0,910629
14	8,389703	0,599265
15	5,721649	0,381443
16	3,765290	0,235331
17	2,396679	0,140981
18	1,478626	0,082146
19	0,885810	0,046622
20	0,516138	0,025807
21	0,292932	0,013949
22	0,162149	0,007370
23	0,087645	0,003811
24	0,046310	0,001930
25	0,023943	0,000958

```

1 import math
2 #Функция факториала
3 def fact(l: int) -> int:
11 #Функция для двойного факториала
12 def fact_d(l: int) -> int:
22 # Вычисление Площадей поверхности n-сфер
23 print('Area:')
24 for i in range(1, 26):
25     if i % 2 == 0:
26         k = i // 2
27         s = (2 * k * (math.pi ** k)) / fact(k)
28         v = (math.pi ** k) / fact(k)
29         print('№ ', i, ' - ', end='')
30         print(f"{s:6.4f}")
31     if i % 2 == 1:
32         k = (i - 1) // 2
33         s = ((2 * k + 1) * (2 ** (k + 1)) * (math.pi ** k)) / fact_d(2 * k + 1)
34         v = (2 ** (k + 1) * (math.pi ** k)) / fact_d(2 * k + 1)
35         print('№ ', i, ' - ', end='')
36         print(f"{s:6.4f}")
37 # Вычисление Объемов n-сфер
38 print('Volume:')
39 for i in range(1, 26):
40     if i % 2 == 0:
41         k = i // 2
42         v = (math.pi ** k) / fact(k)
43         print('№ ', i, ' - ', end='')
44         print(f"{v:6.4f}")
45     if i % 2 == 1:
46         k = (i - 1) // 2
47         v = (2 ** (k + 1) * (math.pi ** k)) / fact_d(2 * k + 1)
48         print('№ ', i, ' - ', end='')
49         print(f"{v:6.4f}")

```

Рис. 1. Алгоритм вычисления S_n и V_n n-сфер
Fig. 1. The algorithm for calculating S_n and V_n n-spheres

Графически сходимость S_n и V_n к 0 представлена на рис. 2.

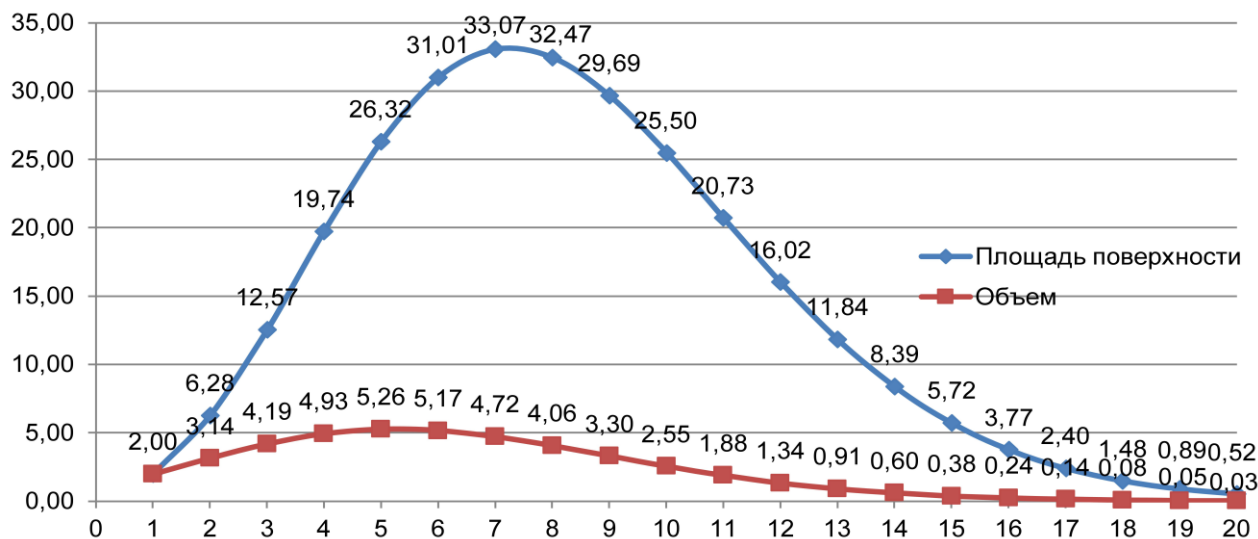


Рис. 2. S_n и V_n n-сфер единичного радиуса в зависимости от n
Fig. 2. S_n и V_n n-sphere of unit radius depending on n

Как видно из полученных данных, экстремумы значений для S_n и V_n наблюдаются на размерностях n равных 6 и 5 соответственно. Обратим внимание, что для задач оптимизации рассматриваются случаи граничных условий, начиная от S_1 , геометрически соответствующей двумерному кругу, и V_3 , геометрически соответствующей трехмерному шару. Выбрав значения S и V этих фигур, при R=1, за базисные, заметим, что для площади поверхности n-сферы S_n становятся меньше начиная с n=14, а для V_n уже с n=8. Для n=18 и n=14 значения S_n и V_n составляют уже менее 15 % соответственно. Авторы этим наблюдением хотят показать, что возможно для некоторых типов задач, чрезмерное повышение размерности не будет давать нужной точности. В случаях определенной постановки задач такая сходимость к нулю может иметь положительный аспект.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Многокритериальные модели, в которых граничные условия задаются гиперсферой требуют более глубокого анализа. На их основе возможна разработка методов управления данными информационными моделями, в том числе решение задач машинного обучения. При решении задач развертки или масштабирования таких моделей на пространство меньших размерностей, как это реализовано в [11, 12, 15], возможен переход к визуализации, трансформации и анализу информации сложных систем [13]. Дальнейшими векторами развития моделей, использующих n-сферы, могут быть алгоритмы, которые переходят от простого отображения одной гиперсферой несколькими [14] или которые включают в себя подбор оптимальных гиперпараметров, нормализацию радиуса гиперсфер и настройку параметров оптимизации при моделировании [15, 16]. Как справедливо замечено в [17–19], с помощью цифровых технологий можно оптимизировать процесс понижения размерностей и, путем автоматизированного отбора небольшого количества наиболее информативных признаков, значительно сократить число просматриваемых проекций. А применение информационных моделей и современных технологий моделирования значительно облегчает разработку проекта строительства [20]. Сейчас в сфере строительного рынка существует ряд приоритетных задач, которые кроме модернизации существующих механизмов инвестиционно-строительной деятельности требуют разработки новых подходов [21, 22]. Например, для задач управления жизненным циклом объектов капитального и транспортного строительства разрабатываются технологии на основе искусственных нейронных сетей, обучаемых методами машинного обучения [23, 24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показаны асимптотические особенности площадей поверхности n-сфер и объемов ими ограниченных. Представлен алгоритм для вычисления S_n и V_n n-сфер единичного радиуса и проанализированы полученные значения. Выдвигается гипотеза об ограниченной применимости n-сфер для задач оптимизации и классификации. Следующим шагом предполагается работа по использованию n-сфер для моделирования и анализа при внедрении информационных технологий, в том числе технологий нейронных сетей, в отрасли строительства.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ларин А.О., Середин О.С., Копылов А.В. Модифицированный критерий для описания данных гиперсферой с учетом нетипичных объектов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. № 10. С. 231–239. EDN: BFLGEK.
2. Мелешкин С.Н. Метод построения собственных областей классов в виде гиперсфер в задачах оптимизации разделяющих поверхностей // Национальная Ассоциация Ученых. 2015. № 3-3. С. 88–92. EDN: YGFJKZ.
3. Саушев А.В. Оптимизация параметров сложных электротехнических систем // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 2 (21). С. 35–44. EDN: RUOHZL.
4. Землянский А.А., Снежко В.Л., Зайнудинов С.З. Актуальные основы цифровизации. М.: Спутник+, 2019. 165 с. EDN: FBHRVH.
5. Лапидус А.А., Локтев В.А. Формирование методики совершенствования процесса управления жизненным циклом объектов социальной инфраструктуры // Components of Scientific and Technological Progress. 2023. № 7 (85). С. 30–34. EDN: DDGQGB.
6. Lei Lei, Bing Wu, Xin Fang, Li Chen, Hao Wu, Wei Liu A Dynamic Anomaly Detection Method of Building Energy Consumption Based on Data Mining Technology // Energy. 2023. Vol. 263. P. 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.125575>.
7. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. 624 с.
8. Неклюдов А.В. Некоторые нестандартные доказательства и задачи в курсе математического анализа // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5 (17). С. 1–11. EDN: RHAKVT.
9. Huber G. Gamma Function Derivation of n-Sphere Volumes // The American Mathematical Monthly. 1982. Vol. 89. Iss. 5. P. 301–302. <https://doi.org/10.2307/2321716>.
10. Бураков С.В., Зиборов Е.Д., Сыпачев В.С., Тюкачева И.М. Вычисление площади n-мерной сферы с помощью интеграла Пуассона // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2017. Т. 2. № 13. С. 265–267. EDN: YQWFZN.
11. Sami I. Muslih, Om P. Agrawal A Scaling Method and Its Applications to Problems in Fractional Dimensional Space // Journal of Mathematical Physics. 2009. Vol. 50. Iss. 12. P. 123501. <https://doi.org/10.1063/1.3263940>.
12. Русанов В.С., Рязанцев М.Н. Модификация алгоритма масштабируемой гиперсферы для поиска путей реакции на поверхности потенциальной энергии молекул // Неделя науки СПбПУ. Материалы науч. конф. с междунар. участием (г. Санкт-Петербург, 13–19 ноября 2017 г.). СПб, 2017. С. 284–286. EDN: YCGHGR.
13. Qing Li, Guanzhong Wu, Hang Ni, Tao You Anomaly Detection with Dual-Channel Heterogeneous Graph Based On Hypersphere Learning // Information Sciences. 2024. Vol. 681. P. 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121242>.
14. Сират Д. Моделирование и методы оптимизации затрат на развитие кластеризованных организационных структур управления строительных компаний // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2024. Т. 14. № 2. С. 348–355. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-2-348-355>. EDN: UEVQNI.
15. Dapeng Wang, Dequan Zhang, Yuan Meng, Meide Yang, Chuizhou Meng, Xu Han et al. AK-HRⁿ: An Efficient Adaptive Kriging-Based N-Hypersphere Rings Method for Structural Reliability Analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2023. Vol. 414. P. 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116146>.
16. Hughes M., Goerigk M., Wright M. A Largest Empty Hypersphere Metaheuristic for Robust Optimisation with Implementation Uncertainty // Computers and Operations Research. 2019. Vol. 103. P. 64–80. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.10.013>.
17. Davey N.A.C., Chase J.G., Cong Zhou, Liam Murphy Preserving Multi-Dimensional Information: A Hypersphere Method for Parameter Space Analysis // Heliyon. 2024. Vol. 10. Iss. 7. P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e28822>.
18. Галустов Г.Г., Мелешкин С.Н. Метод главных компонент в задачах снижения размерности признакового пространства биомедицинских данных с целью их визуализации // Цифровые методы и технологии: материалы междунар. науч. конф. (г. Таганрог, 01–30 ноября 2005 г.). Таганрог, 2005. С. 34–37.
19. Галустов Г.Г., Мелешкин С.Н. Метод формирования областей допустимых вероятностей в задачах классификации биомедицинских данных, визуализированных в двумерном признаковом пространстве // Цифровые методы и технологии: материалы междунар. науч. конф. (г. Таганрог, 01–30 ноября 2005 г.). Таганрог, 2005. С. 30–34. EDN: JLRLUQ.

20. Бадмаева И.А., Волкова Е.В. Технологии информационного моделирования объектов дорожного строительства // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2022. Т. 12. № 4. С. 521–528. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2022-4-521-528>. EDN: FXCTCH.
21. Пешков В.В., Кудрявцева В.А., Никишина О.В. Механизм комплексного развития территорий как базовый ресурс для развития регионального жилищного строительства // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2024. Т. 14. № 1. С. 10–19. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-1-10-19>. EDN: UINEZA.
22. Дмитриева Т.Л., Ященко В.П., Курышов И.А. BIM как средство сквозного проектирования, технологии возведения и эксплуатации // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2023. Т. 13. № 2. С. 252–261. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2023-2-252-261>. EDN: JVVJYQ.
23. Сулейманова Л.А., Обайди А.А. Управление жизненным циклом здания на этапе эксплуатации с использованием моделей искусственных нейронных сетей и машинного обучения // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2024. № 3. С. 38–46. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2024-9-3-38-46>. EDN: DHJYVT.
24. Тиратурян А.Н., Елшами М.М. Определение состояния нежестких дорожных одежд с использованием моделей искусственных нейронных сетей // Современные задачи теоретической механики и динамики. Сб. науч. трудов по материалам II Междунар. конф. с участием молодых ученых и студентов (г. Москва, 21 апреля 2022 г.). М., 2022. С. 53–57. EDN: KEEYCS.

REFERENCES

1. Larin A.O., Seredin O.S., Kopylov A.V. Modified Criterion for Description of Data with A Hypersphere Taking into Account Outliers. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. 2020;10:231-239. (In Russ.). EDN: BFLGEK.
2. Meleshkin S.N. Method of Construction Own Field Class in The Form of a Hypersphere in Optimization Problems Separating Surface. *Natsional'naya Assotsiatsiya Uchenykh*. 2015;3-3:88-92. (In Russ.). EDN: YGFJKZ.
3. Saushev A.V. Optimization of Parameters of Complicated Electrotechnical Systems. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2013;2(21):35-44. (In Russ.). EDN: RUOHZL.
4. Zemlyanskii A.A., Snezhko V.L., Zainudinov S.Z. *Current Foundations of Digitalization*. Moscow: Sputnik+, 2019. 165 p. (In Russ.). EDN: FBHRVH.
5. Lapidus A.A., Loktev V.A. The Formation of Methodology for Improving the Life Cycle Management of Social Infrastructure Facilities. Components of Scientific and Technological Progress. 2023;7(85):30-34. (In Russ.). EDN: DDGQGB.
6. Lei Lei, Bing Wu, Xin Fang, Li Chen, Hao Wu, Wei Liu A Dynamic Anomaly Detection Method of Building Energy Consumption Based on Data Mining Technology. *Energy*. 2023;263:1-19. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.125575>.
7. Vinogradov I.M. *Mathematical Encyclopedia*. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1985. Vol. 5. 624 p. (In Russ.).
8. Neklyudov A.V. Some Nonstandart Proofs and Problems in The Analysis. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*. 2013;5(17):1-11. (In Russ.). EDN: RHAKVT.
9. Huber G. Gamma Function Derivation of n-Sphere Volumes. *The American Mathematical Monthly*. 1982. Vol. 89. Iss. 5. P. 301–302. <https://doi.org/10.2307/2321716>.
10. Burakov S.V., Ziborov E.D., Sipachev V.S., Tyukacheva I.M. The calculation Metod of the N-Dimensional Sphere Area Using the Poisson Integral. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*. 2017;2(13):265-267. (In Russ.). EDN: YQWFZN.
11. Sami I. Muslih, Om P. Agrawal A Scaling Method and Its Applications to Problems in Fractional Dimensional Space. *Journal of Mathematical Physics*. 2009;50(12):123501. <https://doi.org/10.1063/1.3263940>.
12. Rusanov V.S., Ryazantsev M.N. Modification of the Scalable Hypersphere Algorithm for Finding Reaction Paths on the Potential Energy Surface of Molecules. In: *Nedelya nauki SPBPU. Materialy nauchnoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem = SPBPU Science Week. Proceedings of The Scientific Conference with International Participation*. 13–19 November 2017, Saint Petersburg. Saint Petersburg; 2017. p. 284–286. (In Russ.). EDN: YCGHGR.
13. Qing Li, Guanzhong Wu, Hang Ni, Tao You Anomaly Detection with Dual-Channel Heterogeneous Graph Based On Hypersphere Learning. *Information Sciences*. 2024;681:1-17. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121242>.
14. Serat J. Modeling and Optimization of Costs Associated with The Development of Clustered Organizational Management Structures in Construction Companies. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2024;14(2):348-355. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-2-348-355>. EDN: UEVQNI.

15. Dapeng Wang, Dequan Zhang, Yuan Meng, Meide Yang, Chuizhou Meng, Xu Han et al. AK-HRⁿ: An Efficient Adaptive Kriging-Based N-Hypersphere Rings Method for Structural Reliability Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023;414:1-24. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116146>.
16. Hughes M., Goerigk M., Wright M. A Largest Empty Hypersphere Metaheuristic for Robust Optimisation with Implementation Uncertainty. *Computers and Operations Research*. 2019;103:64-80. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.10.013>.
17. Davey N.A.C., Chase J.G., Cong Zhou, Liam Murphy Preserving Multi-Dimensional Information: A Hypersphere Method for Parameter Space Analysis. *Heliyon*. 2024;10(7):1-16. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e28822>.
18. Galustov G.G., Meleshkin S.N. Principal Component Method in Problems of Dimensionality Reduction of Feature Space of Biomedical Data for the Purpose of Their Visualization. In: *Tsifrovye metody i tekhnologii: materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii = Digital Methods and Technologies: Materials of The International Scientific Conference*. 01–30 November 2005, Taganrog. Taganrog; 2005. p. 34–37. (In Russ.).
19. Galustov G.G., Meleshkin S.N. Method for Forming Regions of Acceptable Probabilities in Problems of Classification of Biomedical Data Visualized in A Two-Dimensional Feature Space. In: *Tsifrovye metody i tekhnologii: materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii = Digital Methods and Technologies: Materials of The International Scientific Conference*. 01–30 November 2005, Taganrog. Taganrog; 2005. p. 30–34. (In Russ.). EDN: JLRLUQ.
20. Badmaeva I.A., Volkova E.V. Information Modelling of Road Facilities. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2022;12(4):521-528. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2022-4-521-528>. EDN: FXCTCH.
21. Peshkov V.V., Kudryavtseva V.A., Nikishina O.V. Mechanism of Integrated Territorial Development as A Basic Resource for Promoting Regional Housing Construction. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2024;14(1):10-19. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2024-1-10-19>. (In Russ.). EDN: UINEZA.
22. Dmitrieva T.L., Yashchenko V.P., Kuryshov I.A. BIM as A Means of End-To-End Design, Construction, And Operation. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2023;13(2):252-261. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2023-2-252-261>. EDN: JYJYQ.
23. Suleymanova L.A., Obaydi A.A. Building Life Cycle Management at The Operation Stage Using Artificial Neural Network Models and Machine Learning. *Bulletin of Belgorod State Technological University Named After V.G. Shukhov*. 2024;3:38-46. (In Russ.). <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2024-9-3-38-46>. EDN: DHJYVT.
24. Tiraturyan A.N., Elshami M.M. Determination of The Condition of Flexible Road Pavements Using Artificial Neural Network Models. In: *Sovremennye zadachi teoreticheskoi mekhaniki i dinamiki. Sbornik nauchnykh trudov po materialam II Mezhdunarodnoi konferentsii s uchastiem molodykh uchenykh i studentov = Modern Problems of Theoretical Mechanics and Dynamics. Collection of Scientific Papers Based On the Materials of The II International Conference with The Participation of Young Scientists and Students*. 21 April 2022, Moscow. Moscow; 2022. p. 53–57. (In Russ.). EDN: KEEYCS.

Информация об авторах

Боков Сергей Сергеевич,
старший преподаватель кафедры
здания и сооружения на транспорте,
Российский университет транспорта (МИИТ),
127994, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, д. 9,
стр. 9, Россия,
✉ e-mail: bokov.roat@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2508-8622>
AuthorID: 1051214

Шматков Руслан Николаевич,
к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедры высшей математики,
Сибирский государственный университет
путей сообщения,
630049, г. Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191,
Россия,
e-mail: srn-travel@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-5348-282X>
Author ID: 14998

Information about the authors

Sergei S. Bokov,
Senior Lecturer of the Department of Buildings
and Structures in Transport,
Russian University of Transport (MIIT),
9, 9 Bldg., Obraztsova St., Moscow 127994, GSP-
4, Russia,
✉ e-mail: bokov.roat@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-2508-8622>
AuthorID: 1051214

Ruslan N. Shmatkov,
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Associate Professor
of the Department of Higher Mathematics,
Siberian Transport University,
191 Dusy Kovalchuk St., 630049 Novosibirsk,
Russia,
e-mail: srn-travel@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-5348-282X>
Author ID: 14998

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests regarding the publication of this article.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

The final manuscript has been read and approved by all the co-authors.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 09.01.2025.
Одобрена после рецензирования 27.01.2025.
Принята к публикации 28.01.2025.

Information about the article

The article was submitted 09.01.2025.
Approved after reviewing 27.01.2025.
Accepted for publication 28.01.2025.