



Метод гармонического элемента в расчетном обеспечении безопасности эксплуатации сооружений

В.И. Соболев¹, Д.А. Кармазинов^{2✉}, Т.Н. Черниговская³

^{1,2}Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия

³Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия

Аннотация. Рассмотрены возможности и результативность применения метода гармонического элемента в определении и формировании частотных характеристик сооружений, подверженных интенсивным динамическим воздействиям. Возможности формирования необходимых величин частот собственных колебаний сооружений реализуются за счет включения в параметры гармонических элементов продольных сил, влияющих на процессы изгибных колебаний балочных элементов. Таким образом, осуществляется возможность настройки частот собственных колебаний, варьирование которыми позволяет в известных пределах осуществлять функции виброзащиты или сейсмозащиты сооружения, а также давать оценку границ устойчивости сооружения. Возможность учета в качестве гармонических элементов балок с распределенными инерционными массами, сосредоточенных масс, твердых тел позволяет создавать динамические модели сооружений, несущих технологическое оборудование, избегая построения дискретизированных моделей, порождающих проблемы оценки погрешности дискретизации и многочисленные проблемы вычислительного характера. Для железобетонных конструкций формирование необходимых продольных сил возможно при помощи преднапряжений арматуры.

Ключевые слова: собственные колебания, продольные силы, преднапряжения, гармонические элементы, безопасность сооружений

Для цитирования: Соболев В.И., Кармазинов Д.А., Черниговская Т.Н. Метод гармонического элемента в расчетном обеспечении безопасности эксплуатации сооружений // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2023. Т. 13. № 2. С. 348–358. <https://elibrary.ru/qzaena>. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2023-2-348-358>.

Original article

Harmonic element method for calculation of operating safety of structures

Vladimir I. Sobolev¹, Danil A. Karmazinov^{2✉}, Tatyana N. Chernigovskaya³

^{1,2}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

³Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Abstract. The possibilities and efficiency of the use of the harmonic element method (HEM) for the determination of frequency characteristics for structures subjected to intensive dynamic effects are considered. This method allows the necessary values of frequencies for structural natural vibrations to be obtained by including the longitudinal forces influencing the bending vibrations of beam elements in the parameters of harmonic elements. Therefore, it is possible to adjust the frequencies of natural vibrations, whose variation within known limits offers the vibration or seismic protection of the structure, along with an assessment of its stability limits. The method considers beams with distributed inertial masses, concentrated masses, and solid bodies as harmonic elements, which allows the dynamic models of structures carrying technological equipment to be created. This approach avoids the need for constructing discretized models, which entail the estimation of discretization errors and various computational challenges. In the case of reinforced concrete structures, the necessary longitudinal forces can be generated by prestressing the reinforcement.

Keywords: natural oscillations, longitudinal forces, prestresses, harmonic elements, safety of structures

For citation: Sobolev V.I., Karmazinov D.A., Chernigovskaya T.N. Harmonic element method for calculation of operating safety of structures. *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost' = Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2023;13(2):348-358. (In Russ.). <https://elibrary.ru/qzaena>. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2023-2-348-358>.

ВВЕДЕНИЕ

Основой механических колебаний является знакопеременное движение динамической системы. Динамическая система определяется как совокупность объектов, обладающих массой и способных к относительному движению.

Большинство повреждений строительных конструкций вызвано возникновением вибрации. По этой причине проектировщики ставят перед собой задачу ограничить влияние вибрационных процессов на проектируемые строительные конструкции, главным образом посредством систем пассивной виброизоляции.

Однако вибрация как явление вызывается циклическими или внезапными силами, действующими отдельно или в сочетании с тепловыми, статическими или другими факторами. Это особенно важно в силу того, что периодические силы и моменты могут вызывать вынужденные упругие колебания, оказывающие особенно разрушительный эффект при возникновении резонанса. Поскольку большинство виброактивного оборудования, размещаемого в промышленных (грохота, дробилки) и гражданских (грузовые и пассажирские лифты) зданиях, генерирует вибрации частоты, близкой к собственной частоте означенных выше сооружений, проблема резонанса оказывается особенно острой.

Также следует отметить, что увеличение производительности машин приводит к повышению скоростей, увеличению энергопотребления и усложнению рабочих процессов и структурных конструкций. В результате характер вибрации в современных машинах становится все более сложным, а вибрационные нагрузки на элементы строительных конструкций возрастают.

Все это приводит к потребности в формировании устойчивых методов воздействия на инерционные параметры виброактивных систем, с целью изменения частоты колебаний этих систем. Последнее обстоятельство позволяет вывести колебательный процесс из резонансной зоны и тем самым значительно снизить нагрузки на несущие конструкции здания.

Моделирование динамических процессов, протекающих в системах с нерегулярным распределением границ областей и нерегуляр-

ными граничными условиями - деформируемых объектов и конструкций различного назначения осуществляется, как правило, путем представления их инерционных параметров как дискретной совокупности их значений. Такая дискретизация представляет собой процесс разделения непрерывной расчетной схемы на дискретные элементы с целью анализа ее динамического поведения и инерционного отклика. Такая дискретизация является фундаментальным шагом в анализе динамики зданий, особенно при изучении реакции конструкций на динамические нагрузки, такие как землетрясения или ветер.

Инерционные параметры, такие как параметры массы и жесткости, характеризуют распределением или континуальностью. Путем дискретизации этих параметров непрерывная конструкция разделяется на более мелкие, взаимосвязанные элементы, каждый из которых обладает своими собственными свойствами массы и жесткости. Этими элементами могут быть балки, колонны, стены, плиты перекрытия или любые другие конструктивные элементы, из которых состоит здание или сооружение.

Для дискретных механических систем характерны следующие плюсы:

1. Гибкость анализа: Дискретизация позволяет применять широкий спектр методов анализа, специально адаптированных для дискретных элементов. Эти методы включают анализ методом конечных элементов, методы конечных разностей и другие численные методы.

2. Универсальность моделирования: Дискретизация обеспечивает универсальные возможности моделирования. Инженеры могут представлять различные типы конструктивных компонентов, таких как балки, колонны, плиты перекрытия и стены, соответствующими типами элементов.

3. Вычислительная эффективность: Дискретизация структуры позволяет использовать эффективные вычислительные алгоритмы и численные методы, специально разработанные для дискретных элементов.

При всех преимуществах данного подхода, в числе которых можно привести возможность

получения достаточно точного решения уравнений динамики для подобного рода дискретизированных систем, очевидны и его недостатки:

1. Оценка точности дискретизации модели может оказаться весьма затруднительной [1].

2. При возможном значительном числе учитываемых узловых точек пропорционально вырастает размерность дискретной модели, что неизменно влечет за собой затруднение анализа обусловленности вибрационных процессов [2].

3. Получение адекватного действительности частотного спектра модели находится в прямой зависимости от количества узловых точек, являющихся средоточием инерционных характеристик в рассматриваемой системе, а также от способа дискретизации исходной системы [3, 4].

Метод гармонических элементов может быть предложен в качестве средства устранения недостатков, связанных с дискретизацией инерционных параметров при решении динамических задач, главным образом для повы-

шения точности конечных результатов. Этот метод основан на методе динамической податливости [5, 6], являющийся в сущности своей развитием метода перемещений и применяемый для аналитического описания систем, подверженных воздействию виброактивных сил.

МЕТОДЫ

Установим определение введенного ранее термина «гармонический элемент» (ГаЭ). Так, гармонический элемент относится к модификациям конечного элемента [7–16], которая содержит, помимо прочего, в качестве параметров частоту внешнего воздействия ω и распределенную массу ρ . Гармонические элементы используются для получения аналитического представления колебательных форм как функций параметров ω и N с их последующим анализом. В целях демонстрации мы рассмотрим полный набор аналитических преобразований, относящихся к элементу типа шарнир-шарнир (Ш-Ш), представленного на рис. 1.



Рис. 1. Расчетная схема балки вида «шарнир – шарнир»
Fig. 1. The design scheme of the beam of the "hinge - hinge" type

Упомянутый выше термин «метод гармонических элементов» можно считать уместным, поскольку, сохраняя те же свойства и методы решения, что и метод конечных элементов, он также учитывает частотные эффекты и распределенную массу. Это значительно упрощает анализ точности дискретизации в исходной системе и расширяет применимость результатов к более сложным моделям. В результате могут быть разработаны нетрадиционные методы виброизоляции, основанные на манипулировании инерционными параметрами, для получения форм вибрации со специфическими свойствами.

Следуя изложенным выше принципам, смоделируем вынужденные колебания балки с частотой ω под действием неизменной во времени продольной силы N . Также условимся обозначать длину рассматриваемой балки

литерой a , погонную массу литерой c и жесткость как EJ . Приведем внешнее воздействие, наложенное на балку, к совокупности сосредоточенных силовых факторов, приложенных в ее граничных точках (узлах). В таком случае весь механический процесс, совершаемый балкой под воздействием внешних силовых факторов, можно определить как колебательный. При этом колебания выполняются под воздействием сосредоточенных гармонических сил и моментов. Если предположить, что сколь угодно близкие узлы балки не взаимодействуют между собой, то равновесие ее элементарного участка в пролетной зоне можно описать с помощью уравнения Эйлера-Бернулли¹

$$\rho \cdot V_{tt} + EJ \cdot V_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

При заданной частоте внешнего воздей-

ствия ω справедливо следующее расширение данного уравнения:

$$\rho \cdot V_{ii} + EJ \cdot V_{xxxx} - N \cdot V_{xx} = 0. \quad (2)$$

Для гармонического элемента, в отличие от обыкновенного конечного элемента, оказывается справедливым следующее обстоятельство.

Единичное гармоническое перемещение каждой связи вызывает отклик во всех наложенных связях, при этом несущественным является факт статической определимости рассматриваемого конечного элемента. Данное свойство гармонических элементов позволяет сформировать невырожденную матрицу жесткостей и для статически определимых элементов, что открывает возможность для описания динамических характеристик подобных систем. Указанные выше реакции, расположенные последовательно в соответствии с номерами связей, образуют вектор R_i , представляющий амплитуды гармонических реакций внутри связей. Поочередное гармоническое перемещение связей формирует матрицу динамических реакций $R = \{R_1, R_2, R_3\}$. В свою очередь, манипулируя значением внешней продольной силы N возможно не только изменить частоту собственных колебаний и колебательную форму элемента, но и получить

колебательную форму с заранее определенными свойствами. Следовательно, такой подход может быть положен в основу методики снижения интенсивности вибраций, позволяя в некоторых случаях и вовсе устранить таковые.

Данный метод виброизоляции, основанный на управлении характеристиками колебательной системы (объекта управления) при помощи внешнего продольного воздействия (управляющее устройство), и проиллюстрирован в рамках данной работы.

При заданной частоте внешнего воздействия ω колебательные формы балки однозначно определяются вектором амплитуд узловых гармонических перемещений в котором компоненты расположены по порядку нумерации соответствующих связей.

$$Y = (Y(0), Y_{xx}|_{x=0}, Y(a), Y_{xx}|_{x=a})^T, \quad (3)$$

Выражение (3) в сущности описывает более общий сценарий наложения связей на балку в количестве четырех штук.

Данный вариант представлен на рис. 2.

Учитывая, что в варианте Ш-Ш угловые связи отсутствуют, допустимо сделать следующее уточнение: $Y_{xx}|_{x=0} \equiv 0$ и $Y_{xx}|_{x=a} \equiv 0$.



Рис. 2. Нумерации связей стержня с жесткими узлами
Fig. 2. Numbering of rod connections with rigid nodes

Вектор $Y \sin \omega t$ определяет граничные условия, используемые для получения однозначного решения уравнения (2).

Поочередное гармоническое перемещение связей формирует матрицу динамических реакций

$$R = \{R_1, R_2\}.$$

Подставим искомое решение вида

$$V(x) = Y(x) \sin(\omega t)$$

в уравнение (2). Сократив полученное уравне-

ние на $\sin(\omega t)$, получим:

$$Y^{(IV)}(x) - \frac{NY^{(2)}(x)}{EJ} - Y(x) \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для (4) имеет вид:

$$\mu^4 - \frac{N}{EJ} \mu^2 - \frac{\omega^2 \rho}{EJ} = 0.$$

Определив

¹Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций: учебное пособие для вузов. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 518 с.

$$\mu^2_{12} = -\frac{N}{2EJ} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}},$$

имеем

$$\mu_1 = q, \quad \mu_2 = -q, \quad \mu_3 = is, \quad \mu_4 = -is$$

где

$$q = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}},$$

$$s = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + \frac{\omega^2 \rho}{EJ}}}.$$

Общее решение $Y(x)$ уравнения (4) может быть представлено в виде линейной комбинации

$$Y(x) = H(x)\vec{C} \quad (5)$$

четырёх линейно независимых частных решений, образующих базисную вектор функцию

$$H(x) = (e^{qx}, e^{-qx}, \sin(sx), \cos(sx)),$$

где C является вектором коэффициентов линейной комбинации (5).

Краевые условия для решения уравнения (4) могут быть заданы в виде вектора (3). Матрицы C и L (матриц векторов амплитуд единичных перемещений) имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \\ c_{41} & c_{43} \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \\ O & I \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C определяются из решения систем уравнений:

$$AC = L, \quad (6)$$

где A – матрица, образованная из базисной вектор функции $H(x)$ следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} H(0) \\ H_{xx}(x)|_{x=0} \\ H(a) \\ H_{xx}(x)|_{x=a} \end{pmatrix}.$$

Матрица амплитуд реакций в связях (матрица гармонических реакций [18]) определяется в виде

$$R = EJC^T H \quad (7)$$

$$\text{где } H = (H_{xxx}^T(x)|_{x=0}, -H_{xxx}^T(x)|_{x=a}).$$

Вектор столбец Y амплитуд узловых перемещений найдется как

$$RY = F, \text{ или } EJ(A^{-1}L)^T H = F.$$

Функция амплитуд перемещений оси балки (функция формы вынужденных колебаний) при заданной узловой форме F силового гармонического воздействия имеет вид

$$Y(x) = Y^T C^T H^T(x) \quad (8)$$

Для рассматриваемого случая шарнирного закрепления балки в узлах матрица краевых условий примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ q^2 & q^2 & 0 & -s^2 \\ e^{aq} & e^{-aq} & \sin(as) & \cos(as) \\ q^2 \cdot e^{aq} & q^2 \cdot e^{-aq} & -s^2 \cdot \sin(as) & -s^2 \cdot \cos(as) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Учитывая (9), из (6) имеем

$$C = \frac{1}{q^2 + s^2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{s^2 e^{-aq}}{2 \cdot \sinh(a \cdot q)} & \frac{s^2}{2 \cdot \sinh(a \cdot q)} \\ \frac{2 \cdot \sinh(a \cdot q)}{s^2 e^{aq}} & -\frac{2 \cdot \sinh(a \cdot q)}{s^2} \\ -q^2 \cdot \frac{\cos(as)}{\sin(as)} & \frac{q^2}{2 \cdot \sin(as)} \\ \frac{q^2}{2 \cdot \sin(as)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя полученную матрицу коэффициентов, для опорных реакций балки при динамическом воздействии в (7), имеем

$$R_{11} = \frac{EJ \cdot s^2 \cdot q^2}{s^2 + q^2} \cdot s \cdot \cot(as) - q \cdot \coth(a \cdot q) \quad (11)$$

$$R_{12} = \frac{EJ \cdot s^2 \cdot q^2}{s^2 + q^2} \cdot \frac{q}{\sinh(a \cdot q)} - \frac{s}{\sinh(a \cdot q)} \quad (12)$$

$$R_{21} = \frac{EJ \cdot s^2 \cdot q^2}{s^2 + q^2} \cdot \frac{q}{\sinh(a \cdot q)} - \frac{s}{\sinh(a \cdot q)} \quad (13)$$

$$R_{22} = \frac{EJ \cdot s^2 \cdot q^2}{s^2 + q^2} \cdot s \cdot \cot(as) - q \cdot \coth(a \cdot q) \quad (14)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

С целью анализа влияния продольного воздействия, приложенного к шарнирно опертой балке, рассмотрим графическую интерпретацию выражений (11–14). Так, на рис. 3 и 4 представлены графики зависимости R_{11} и R_{12} как функций от параметров продольного воздействия N и ω . Так, из графика на рис. 3 видно, что функция R_{11} характеризуется монотонным убыванием в областях между линиями разрыва. Данное обстоятельство равносильно существованию так называемых нулевых линий – линий нулевых значений амплитуд [18, 19] динамических реакций системы. Продолжая анализ приведенного на рис. 3 графика, следует также отметить, что пересечение первой от начала координат нулевой линии оси N формирует условие потери устойчивости си-

стемой. Это означает, что при сколь угодно малой частоте внешнего воздействия реакции в связях системы не возникают. Данное обстоятельство также может быть важно с точки зрения анализа механических систем, находящихся под внешним воздействием. Таким образом, задавая для частоты внешнего воздействия определенное значение продольного силы можно снизить (или же обратить в ноль)

значение динамической реакций R_{11} и R_{22} . Последнее утверждение можно дополнительно проиллюстрировать с использованием графика на рис. 5. Для него принято, что частота внешнего воздействия постоянна и равна 100 условным единицам, а параметры системы принимают следующие значения: $EJ = 10$, $\rho = 10$, $a = 10$.

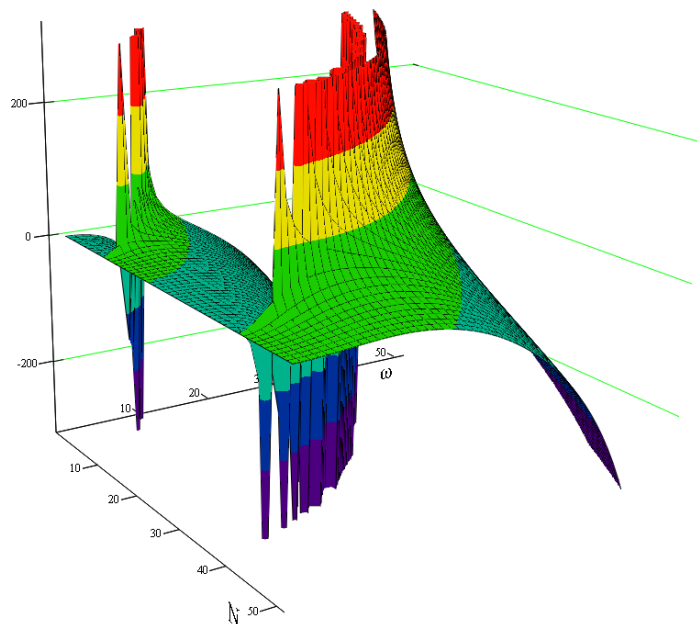


Рис. 3. График реакции $R_{11}(N, \omega)$
 Fig. 3. Reaction schedule $R_{11}(N, \omega)$

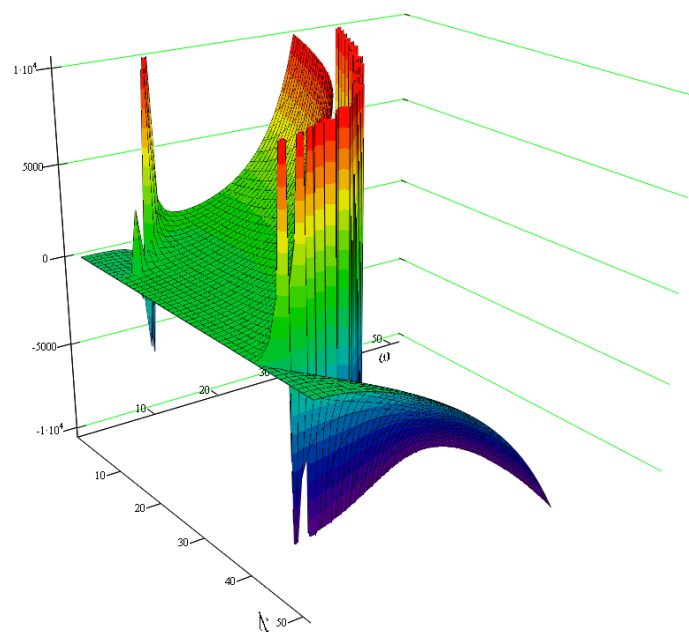


Рис. 4. График реакции $R_{12}(N, \omega)$
 Fig. 4. Reaction schedule $R_{12}(N, \omega)$

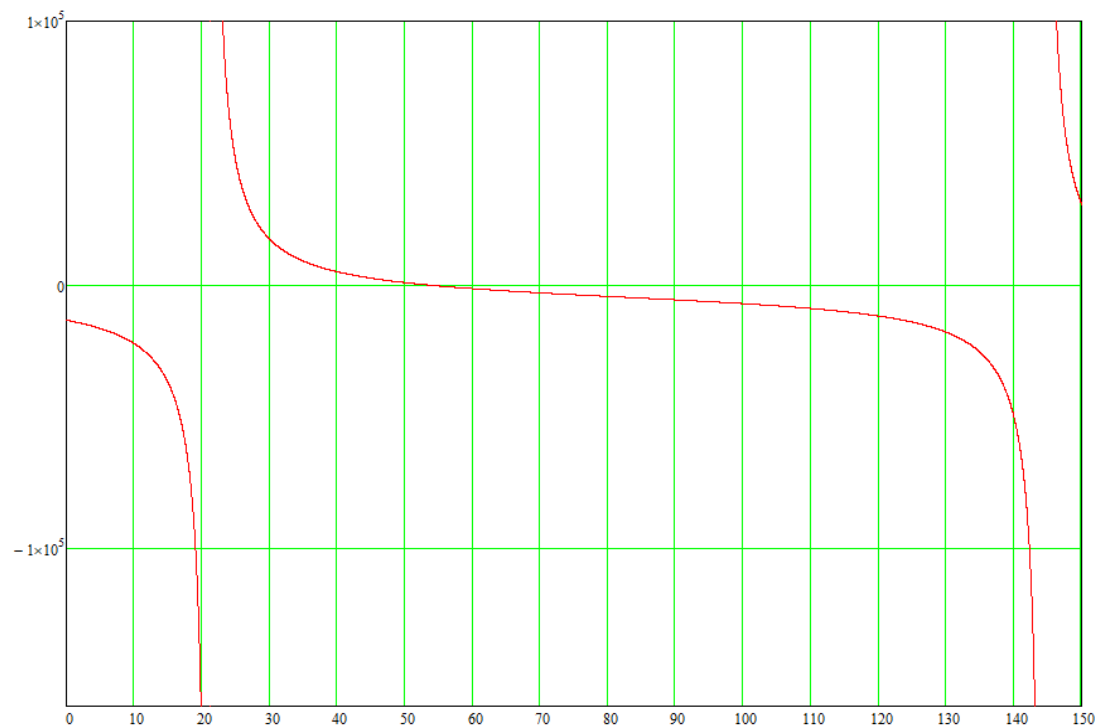


Рис. 5. График зависимости $R_{11}(N, \omega)$ при фиксированном $\omega=100$
 Fig. 5. Dependency graph $R_{11}(N, \omega)$ with a fixed $\omega=100$

На рис. 5 видно, что при продольном воздействии на систему, численно равному $N=55$, значение $R_{11}(N, \omega)$ (равно как и значение $R_{22}(N, \omega)$) обращается в ноль. Однако обратить в ноль реакции $R_{12}(N, \omega)$ и $R_{21}(N, \omega)$ не представляется возможным, что напрямую следует из формы графика этих функций, представленном на рис. 4. В самом деле, поверхность, представленная на данном рисунке характеризуется чередованием областей вогнутости и выпуклости, асимптотически стремящихся к поверхностям разрыва функции и не пересекающих плоскость $N=0$. Таким образом, изменяя значения N представляется возможным лишь уменьшить, но не обратить в ноль значение соответствующих функций реакций.

Из сказанного выше следует, что решение уравнения Эйлера-Бернулли для систем, находящихся под воздействием некоторой продольной силы, обладает значительным потенциалом с точки зрения создания систем активной виброизоляции. Данные системы позволяют решать задачу уменьшения влияния виброактивных систем в более широком спектре частот колебаний в сравнении с системами пассивной виброизоляции, как это следует из анализа рис. 4 и 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При разработке систем виброзащиты, допускающих линейную интерпретацию колеба-

тельного процесса, крайне перспективным оказывается использование гармонического элемента [20]. Применение данной формализации влечет за собой ряд преимуществ. Во-первых, используя метод гармонических элементов, можно свести к минимуму влияние ошибок дискретизации на инерционные параметры системы. Это особенно полезно при решении динамических задач, поскольку неточное представление инерционных параметров может привести к ошибочным результатам.

Также одним из заметных преимуществ метода гармонических элементов является его способность аналитически представлять колебательные формы, связывая решения уравнений динамического состояния с амплитудами гармонических реакций в наложенных соединениях. Такое аналитическое представление упрощает анализ точности выборки в исходной системе, позволяя более эффективно оценивать поведение системы.

Кроме того, метод гармонических элементов позволяет обобщать результаты на более сложные модели. Это означает, что решения, полученные с помощью этого метода, могут быть применены к системам с различными конфигурациями и свойствами, расширяя его применимость за пределы простых моделей.

Наконец, метод гармонических элементов открывает возможности для нетрадиционных методов виброизоляции [21–29]. Манипулируя

инерционными параметрами системы, становится возможным формировать колебательные формы с заданными свойствами. Это предлагает новый подход к контролю вибрации, при котором реакция системы может быть адаптирована таким образом, чтобы эффективно снижать или устранять нежелательные вибрации.

Таким образом, метод гармонических элементов устраняет ограничения дискретизации при решении динамических задач путем включения как сосредоточенных, так и распределенных параметров в качестве инерционных величин. Он сохраняет свойства метода конечных элементов, позволяя при этом аналитически представлять формы колебаний и облегчая нетрадиционные методы виброизоляции. Такой подход обеспечивает повышенную точность, гибкость и контроль при анализе и

проектировании динамических систем.

Используя данный тип конечного элемента становится возможным получить точное аналитическое выражение динамических реакций как функций продольного внешнего силы и частоты внешнего воздействия.

Последнее обстоятельство открывает возможности для управления значениями опорных реакций стержневой системы при помощи изменения значений продольной силы N .

Таким образом, полученные результаты позволяют говорить об эффективности управления динамическими параметрами колебаний балочных систем при помощи внешней продольной силы, формирование которой возможно при помощи предварительных напряжений арматуры.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Максимов В.П. К вопросу о точности восстановления параметров линейных динамических моделей с дискретным временем // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2018. Т. 13. № 4. С. 502–515. <https://doi.org/10.17072/1994-9960-2018-4-502-515>.
2. Орлов М.Р., Морозова Л.В. Исследование характера разрушения валов винта из стали 40ХН2МА // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 6. С. 44–51. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-6-44-50>.
3. Монахов В.А., Зайцев М.Б. Определение напряженно-деформированного состояния стержневой системы на основе принципа двойственности // Региональная архитектура и строительство. 2021. № 4 (49). С. 96–102. https://doi.org/10.54734/20722958_2021_4_96.
4. Барановский А.М., Щербакова О.В., Пахомова Л.В., Викулов С.В. Метод дискретизации при расчете валов // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. 2020. № 1-2. С. 28–31.
5. Черниговская Т.Н. Численные математические модели стационарных установившихся колебаний тонких упругих пластин с распределенными инерционными параметрами // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО-17): материалы VI Международной конференции (г. Улан-Удэ – Байкал, 26 июня–01 июля 2017 г.). Улан-Удэ – Байкал: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2017. С. 375–378.
6. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний тонкой пластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 4 (16). С. 28–32.
7. C. Farhat, F.-X. Roux, A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (6) (1991) 1205–1227.
8. P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, 2002.
9. Gunzburger, C. Vollmann, *A cookbook for finite element methods for nonlocal problems, including quadrature rule choices and the use of approximate neighborhoods*, arXiv:2005.10775 (2020).
10. C. Pechstein, *Finite and Boundary Element Tearing and Interconnecting Solvers for Multiscale Problems*, Vol. 90 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer Berlin Heidelberg.
11. S. C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (3rd Edition). Springer Verlag, New York, 2008.
12. S.C. Brenner and L.-Y. Sung, *A new convergence analysis of finite element methods for elliptic distributed optimal control problems with pointwise state constraints*, *SIAM J. Control Optim.*, 55(2017), no. 4, 2289–2304.
13. S.C. Brenner, L.-Y. Sung and W. Wollner, *Finite element methods for one dimensional elliptic distributed optimal control problems with pointwise constraints on the derivative of the state*, *Optim. Engrg.*, 22(2021), no. 4, 1989–2008.
14. F. Brezzi, W. Hager and P. Raviart, *Error estimates for the finite element solution of variational inequalities*, Part I. *Primal theory*, *Numer. Math.*, 28(1977), 431–443.
15. P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North-Holland; 1978.
16. K. Deckelnick, A. Gunther and M. Hinze, *Finite element approximation of elliptic control problems with constraints on the gradient*, *Numer. Math.*, 111(2009), 335–350.
17. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М.

Моделирование динамической реакции при резонансных колебаниях удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 74–86. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.06>.

18. Соболев В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного технического университета, 2002. 202 с.

19. Асет А., Мансурова М.Е., Жмудь В.А. Управление нелинейным объектом со многими нелинейными обратными связями // Автоматика и программная инженерия. 2022. № 2 (40). С. 71–87.

20. Соболев В.И., Черниговская Т.Н. Алгоритм формирования гармонического элемента в моделировании колебаний тонкой пластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2008. № 2 (18). С. 29–35.

21. Булаев В.А., Лебедева О.С., Кочетов М.В. Элементы систем виброизоляции в конструкциях сейсмостойких зданий // Инновационные процессы в научной среде: сборник статей Международной научно-практической конференции (г. Новосибирск, 08 декабря 2016 г.). Ч. 3. Новосибирск: ОМЕГА САЙНС, 2016. С. 23–25.

22. Канев Н.Г. Прогноз вибрации рельсового транспорта при проектировании виброизоляции фундаментов зданий // Фундаменты. 2020. № 2. С. 51–52.

23. Базаров И.М. Система виброизоляции здания // Technical Innovations. 2021. № 7. С. 135–137.

24. Суслова К.Ю. Виброизоляция в сейсмостойких зданиях // Тенденции развития науки и образования. 2022. № 92-15. С. 94–97. <https://doi.org/10.18411/trnio-12-2022-706>.

25. Повколос К.Э. Оценка эффективности некоторых способов виброизоляции существующих зданий и сооружений от вибродинамических воздействий, распространяющихся в грунтовой среде // Наука и техника. 2023. Т. 22. № 2. С. 131–140. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-131-140>.

26. Алехин В.Н., Антипин А.А., Городилов С.Н., Пастухова Л.Г. Анализ виброизоляции многоэтажного здания от воздействия метрополитена // Экономические и технические аспекты безопасности строительных критических инфраструктур (SAFETY2015): материалы Международной конференции (г. Екатеринбург, 10–11 июня 2015 г.). Екатеринбург: Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина; НИЦ Надежность и ресурс больших систем и машин УрО РАН. Екатеринбург: Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2015. С. 42–46.

27. Bartolozzi F. Natural frequency automatic variation in seismic isolation system // Technical Acoustics. 2004. Vol. 18. P. 185–200.

28. Василевич Ю.В., Кириленко А.Т., Неумержицкий В.В., Неумержицкая Е.Ю. Виброизоляция зданий, расположенных в технической зоне метрополитена неглубокого заложения // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт. 2016. № 1(32). С. 295–297.

29. Филитова А.А., Криволапов И.П. Основы расчета систем виброизоляции промышленного оборудования общественных зданий и сооружений // Инженерное обеспечение инновационных технологий в АПК: материалы Международной научно-практической конференции (г. Мичуринск, 25–27 октября 2017 г.). Мичуринск: Мичуринский государственный аграрный университет, 2017. С. 94–96.

REFERENCES

1. Maksimov V.P. On the issue of the accuracy of restoring the parameters of linear dynamic models with discrete time. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika = Bulletin of the Perm University. Series: Economy*. 2018;13(4):502-515. (In Russ.). <https://doi.org/10.17072/1994-9960-2018-4-502-515>.

2. Orlov M.R., Morozova L.V. Investigation of the nature of the destruction of propeller shafts made of steel 40KhN2MA. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov = Factory laboratory. material diagnostics*. 2018;84(6):44-51. (In Russ.). <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-6-44-50>.

3. Monakhov V.A., Zaitsev M.B. Determination of the stress-strain state of a rod system based on the principle of duality. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo = Regional architecture and construction*. 2021;4:96-102. (In Russ.). https://doi.org/10.54734/20722958_2021_4_96.

4. Baranovskii A.M., Shcherbakova O.V.,

Pakhomova L.V., Vikulov S.V. Discretization method for calculating shafts. *Nauchnye problemy transporta Sibiri i Dal'nego Vostoka = Scientific problems of transport in Siberia and the Far East*. 2020:1-2:28-31. (In Russ.).

5. Chernigovskaya T.N. Numerical mathematical models of stationary steady oscillations of thin elastic plates with distributed inertial parameters. In: *Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO-17): materialy VI Mezhdunarodnoi konferentsii = Mathematics, its applications and mathematical education (MPMO17): Proceedings of the VI International Conference*. 26 June – 01 July 2017, Ulan-Ude - Baikal. Ulan-Ude - Baikal: East Siberian State University of Technology and Management; 2017. P. 375-378. (In Russ.).

6. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Construction of a rectangular harmonic element for modeling the vibrations of a thin plate. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie = Modern technolo-*

- gies. *System analysis. Modeling*. 2007;4:28-32. (In Russ.).
7. C. Farhat, F.-X. Roux, A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (6) (1991) 1205–1227.
8. P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, 2002.
9. Gunzburger, C. Vollmann, A cookbook for finite element methods for nonlocal problems, including quadrature rule choices and the use of approximate neighborhoods, arXiv:2005.10775 (2020).
10. C. Pechstein, *Finite and Boundary Element Tearing and Interconnecting Solvers for Multiscale Problems*, Vol. 90 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer Berlin Heidelberg.
11. S. C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (3rd Edition). Springer Verlag, New York, 2008.
12. S.C. Brenner and L.-Y. Sung, A new convergence analysis of finite element methods for elliptic distributed optimal control problems with pointwise state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 55(2017), no. 4, 2289–2304.
13. S.C. Brenner, L.-Y. Sung and W. Wollner, Finite element methods for one dimensional elliptic distributed optimal control problems with pointwise constraints on the derivative of the state, *Optim. Engrg.*, 22(2021), no. 4, 1989–2008.
14. F. Brezzi, W. Hager and P. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities, Part I. Primal theory, *Numer. Math.*, 28(1977), 431–443
15. P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North-Holland; 1978.
16. K. Deckelnick, A. Gunther and M. Hinze, Finite element approximation of elliptic control problems with “ constraints on the gradient, *Numer. Math.*, 111(2009), 335–350.
17. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Simulation of dynamic response during resonant vibrations of an elongated plate with an integral damping coating. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika = Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2020;1:74–86. (In Russ.).
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.06>.
18. Sobolev V.I. *Discrete-continuum dynamic systems and vibration isolation of industrial screens*. Irkutsk: PH of the Irkutsk State Technical University; 2002. 202 p.
19. Aset A., Mansurova M.E., Zhmud' V.A. Control of a nonlinear plant with many nonlinear feedbacks. *Avtomatika i programmaya inzheneriya = Automation and program engineering*. 2022;2:71–87. (In Russ.).
20. Sobolev V.I., Chernigovskaya T.N. Algorithm for the formation of a harmonic element in the simulation of oscillations of a thin plate. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie = Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2008;2:29–35. (In Russ.).
21. Bulaev V.A., Lebedeva O.S., Kochetov M.V. Elements of vibration isolation systems in structures of earthquake-resistant buildings. In: *Innovatsionnye protsessy v nauchnoi srede: sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii = Innovative processes in the scientific environment: collection of articles of the international scientific and practical conference*. Part 3. 08 December 2016, Novosibirsk. Novosibirsk: Omega sciences LLC; 2016. p. 23–25. (In Russ.).
22. Kanev N.G. Forecast of vibration of rail transport in the design of vibration isolation of building foundations. *Fundamenty = Foundations*. 2020;2:51–52. (In Russ.).
23. Bazarov I.M. Building vibration isolation system. *Technical Innovations*. 2021;7:135–137. (In Russ.).
24. Suslova K.Yu. Vibration isolation in earthquake-resistant buildings. *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya = Trends in the development of science and education*. 2022;92:15:94–97. (In Russ.).
<https://doi.org/10.18411/trnio-12-2022-706>.
25. Povkolas K.E. Evaluation of the effectiveness of some methods of vibration isolation of existing buildings and structures from vibrodynamic influences propagating in the ground environment. *Nauka i tekhnika = Science and Technology*. 2023;22(2):131–140. (In Russ.). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-131-140>.
26. Alekhin V.N., Antipin A.A., Gorodilov S.N., Pastukhova L.G. Analysis of vibration isolation of a multi-storey building from the impact of the subway. In: *Ekonomicheskie i tekhnicheskie aspekty bezopasnosti stroitel'nykh kritichnykh infrastruktur (SAFETY2015): materialy Mezhdunarodnoi konferentsii = Economic and technical aspects of safety of construction critical infrastructures (SAFETY2015): materials International Conference*. 10–11 June 2015, Yekaterinburg. Yekaterinburg: Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin; SIC Reliability and Resource of Large Systems and Machines of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Edited by V. N. Alyokhin. Yekaterinburg: Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin; 2015. p. 42–46.
27. Bartolozzi F. Natural frequency automatic variation in seismic isolation system. *Technical Acoustics*. 2004;18:185–200.
28. Vasilevich Yu.V., Kirilenko A.T., Neumerzhitskii V.V., Neumerzhitskaya E.Yu. Vibration isolation of buildings located in the technical zone of the metro of shallow laying. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta transporta: nauka i transport = Bulletin of the Belarusian State University of Transport: Science and Transport*. 2016;1:295–297. (In Russ.).
29. Filitova A.A., Krivolapov I.P. Fundamentals of calculation of vibration isolation systems for industrial

equipment of public buildings and structures. In: *In-zhenernoe obespechenie innovatsionnykh tekhnologii v APK: materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii = Engineering*

support of innovative technologies in agriculture : Materials of the international scientific and practical conference. 25-27 October, Michurinsk. Michurinsk: Michurinsk State Agrarian University; 2017. p. 94-96.

Информация об авторах

Соболев Владимир Иванович,
д.т.н., профессор,
профессор кафедры механики
и сопротивления материалов,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
e-mail: vladsobol@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0916-1604>

Кармазинов Данил Андреевич,
инженер-конструктор
ООО «СтройПроектСервис»,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1803-1270>

Черниговская Татьяна Николаевна,
старший преподаватель кафедры
математики,
Иркутский государственный университет
путей сообщения,
664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15,
Россия,
e-mail: tannikch@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1525-4663>

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 02.03.2023.
Одобрена после рецензирования 30.03.2023.
Принята к публикации 31.03.2023.

Information about the authors

Vladimir I. Sobolev,
Dr. Sci (Eng.), Professor, Professor
of the Department of Mechanics
and Resistance of Materials,
Irkutsk National Research
Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia,
e-mail: vladsobol@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0916-1604>

Danil A. Karmazinov,
Design Engineer
of StroyProektService LLC,
Irkutsk National Research
Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk, 664074, Russia,
e-mail: dkarmazinov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1803-1270>

Tatyana N. Chernigovskaya,
Senior Lecturer
of the Department of Mathematics,
Irkutsk State Transport
University,
15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074,
Russia,
e-mail: tannikch@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-1525-4663>

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests regarding the publication of this article.

The final manuscript has been read and approved by all the co-authors.

Information about the article

The article was submitted 02.03.2023.
Approved after reviewing 30.03.2023.
Accepted for publication 31.03.2023.